Sur la discrétisation des déterminants d'opérateurs de Schrödinger

Laurent CHAUMARD

22 décembre 2003

Remerciements

A l'issue d'un travail de trois années, on a peine à mesurer quelle dettes on a contractées auprès de personnes sans lesquelles cette aventure n'aurait pas abouti, soit parce que l'idée de s'y lancer n'aurait pas germé, soit parce qu'elle aurait été privée des tuteurs qui l'ont préservée de nos hésitations ou de nos doutes.

Charge à moi aujourd'hui de rendre solde de tout compte, non pas à la totalité de mes créditeurs, puisque le temps et la place me manquent pour en faire l'inventaire, mais au moins à celles et ceux dont l'influence fut déterminante.

Déjà le remords m'accable que cette liste ne soit pas exhaustive. Non que je sois affecté par la déception d'une proportion d'entre vous, que j'ose espérer maigre, qui ne se passionne pas outre mesure par le fond de ce travail, mais que l'extrême gentillesse a poussé à assister à ma soutenance, et qui espérait bien y tuer le temps en se rassasiant de pleines pages de remerciements. La parade est bien connue, et pour l'avoir maintes fois pratiquée, je ne m'en offusquerai pas.

Ma gêne provient davantage de toutes les personnes que, par omission, par négligence, par manque de place ou de temps, je ne nommerai pas ici. A défaut de consigner leurs noms, je commencerai donc pas les remercier bien cordialement.

Ma plus grande gratitude s'adresse tout naturellement à mes directeurs de thèse Gérard Besson et Bruno Colbois. Je leur suis extrêmement reconnaissant pour la constance de leur écoute et la qualité de leurs conseils. Leur aide m'a été très profitable face à certaines questions qui m'ont longtemps paru insurmontables. Indépendamment du domaine mathématique, j'ai également beaucoup apprécié leur soutien moral, ainsi que l'ambiance très agréable qu'ils ont su instaurer entre eux et leurs thésards. Qu'ils en soient infiniment remerciés !

Je tiens également à remercier G. Carron et T. Kappeler, qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et qui m'ont aidé à corriger un certain nombre d'erreurs.

Plus ponctuellement, je suis heureux d'avoir pu profiter à plusieurs reprises des conseils d'Yves Colin De Verdière.

Un certain nombre de thésards ont également une place de choix à tenir sur cette page. Je pense à Luc qui m'a littéralement éclairé alors que je me débattais vainement dans le bourbier des opérateurs pseudo-différentiels. Ses explications seront sans aucun doute parmi les souvenirs les plus stimulants de mes années de thèse. Ne pas évoquer ici Erwan, ma ressource intarissable de nouvelles idées, serait un délit. Bénéficier dans mon entourage d'une personne comme lui capable d'accorder autant d'intérêt à mon sujet aura été une grande chance. Je l'en remercie vivement.

Merci également à Arlette qui m'a gentiment aidé et guidé dans le labyrinthe administratif. Je lui suis très reconnaissant d'avoir accepté de régler les problèmes dûs à mon départ anticipé de Grenoble.

On ne louera jamais assez l'influence vertueuse d'une atmosphère décontractée et chaleureuse sur la bonne marche d'un travail. Ceux qui l'ont suscitée, et ils sont nombreux, Grenoblois ou Neuchâtellois, méritent ici une place de choix : je pense aux pauses café avec Eric D., Guillemette, Matthieu, Manu, Sophie, Vincent, Eric G., Costia, Xavier, Souleye, ou aux soirées chez Delphine et Christophe, ou Anne, Valery et Mike.

Restent les tributs qui ne s'imposent pas d'eux-mêmes, tant les personnes concernées semblent soit chronologiquement éloignées, soit étrangères à ce travail. Gérard Beureux appartient à la première catégorie. Ils m'a mis tôt le pied à l'étrier ; et sans lui le cours de cette histoire aurait été différent. Pour la deuxième, je rends hommage à Raymond Carion et Gaël, qui font partie de ces rencontres qui, sans que je sois capable de le justifier, ont insidieusement au cours de nombreuses conversations, pesé sur mon choix de m'orienter vers ce travail.

Il est une personne qui mérite un remerciement tout particulier : celle qui m'a aidé à m'évader de cette tâche lorsqu'elle devenait trop pesante, à voir la vie de manière plus légère, et qui a eu la patience de supporter mes excès de mauvaise humeur. Merci infiniment à toi, Marion.

Enfin, et non des moindres, j'ai une pensée particulière pour les membres de ma famille. Il est indéniable que leur bonne humeur a fait du petit village champenois un havre de légèreté dont la ressource m'a été plus d'une fois profitable. En remerciement de tout ce bonheur partagé, je leur dédie modestement cette thèse.

[section] [section] [section] [section] [section]

Table des matières

Introduction

Fonctions ζ

La théorie spectrale des opérateurs de type laplacien positifs sur les variétés compactes révèle d'importantes connexions entre la topologie et la géométrie d'une variété $\mathcal{M}$. Par exemple, la caractéristique d'Euler, les groupes de cohomologie réelle, le volume de $\mathcal{M}$ sont déterminés par le spectre des laplaciens Δ_q sur les $q-$formes. L'étude spectrale de tels opérateurs, que nous noterons génériquement A, a ainsi suscité l'intérêt autant des mathématiciens que des physiciens, pour qui les valeurs propres $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de A sont des quantités accessibles expérimentalement.

Il existe de nombreuses approches de l'étude spectrale des opérateurs de type laplacien. Celle qui nous concerne ici consiste à considérer le spectre dans son ensemble et à lui associer une fonction d'une variable auxiliaire dépendant symétriquement de $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dans cette optique, l'exemple le plus courant est certainement la trace de l'opérateur de la chaleur associé à A :

$$t > 0 \mapsto \mathrm{Trace}\big(e^{-tA}\big) = \sum_{n\geq 0} e^{-t\lambda_n}.$$

L'étude de son asymptotique en temps petit s'est notamment révélée très fructueuse pour exhiber des quantités géométriques locales déterminées par le spectre (voir le livre de R. Rosenberg [Ro]).
Un autre point de vue développé dès les années trente par Carleman [Carl], consiste à encoder le spectre dans une fonction méromorphe ζ_A définie par

$$\zeta_A : s \in \mathbb{C} \mapsto {\sum_{n\geq 0}}' \frac{1}{\lambda_n^s},$$

où l'exposant $'$ signifie que l'on ne somme que sur les valeurs propres non nulles. Ce procédé est classique en théorie analytique des nombres où de telles fonctions sont des exemples de séries de Dirichlet. ζ_A possède en particulier une abscisse de convergence, et s'étend comme l'ont montré Minakshisundaram et Pleijel [MP] en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Alors qu'il est théoriquement équivalent de coder le spectre dans ζ_A ou dans $\mathrm{Trace}\big(e^{-tA}\big)$, la fonction ζ_A contient des informations géométriques difficiles à obtenir par des méthodes utilisant le noyau de la chaleur. Par exemple, pour le laplacien conforme associé à une métrique g, $\zeta_A(0)$ est un invariant conforme dont le calcul en petites dimensions prouve qu'il est hautement non trivial (voir [Ro], pp 148). Cet exemple est par ailleurs révélateur d'un fait intéressant : les valeurs de la fonction ζ_A qui semblent les plus riches en informations géométriques et topologiques sont situées en dehors de son domaine de convergence. Ce sont des valeurs associées canoniquement au spectre mais définies de manière implicite. Il en est ainsi de la notion importante de déterminant $\zeta-$régularisé.

$\zeta-$déterminants

Remarquons que pour une matrice hermitienne A d'ordre N injective,

$$\det A = \exp\left\{-\frac{d}{ds}_{|s=0}\left(s \mapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n^s}\right)\right\}.$$

En 1973, D.B. Ray et I.M. Singer [1] ont eu besoin d'une notion de déterminant pour les opérateurs laplacien Δ_q sur les $q-$formes. Remarquant la régularité de ζ_{Δ_q} en 0, ils eurent l'idée de poser

$$\det_{\zeta}{}'(\Delta_q) := e^{-\frac{d}{ds}_{|s=0}\zeta_{\Delta_q}(s)},$$

où à nouveau l'exposant $'$ signifie que l'on a régularisé le produit des valeurs propres non nulles. Notons que cet invariant géométrique, qui prend en compte l'intégralité du spectre de A est non trivial : dans le cas du laplacien sur les surfaces compactes, une homothétie sur la métrique induit une multiplication du déterminant par un facteur qui dépend de la topologie de $\mathcal{M}$ et de la régularité du bord.

Un article de B. Osgood, R. Phillips et P. Sarnak [OPS1] publié en 1988 a ensuite révélé les possibilités qu'offrait ce nouvel invariant spectral : ces auteurs ont étudié le comportement du déterminant dans les classes conformes de métriques sur les surfaces compactes avec ou sans bord. Dans le cas où $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$, ils montrent qu'à volume fixé, le déterminant atteint son maximum pour l'unique métrique à courbure constante de la classe conforme, ce qui fournit une nouvelle démonstration du théorème d'uniformisation (pour $\mathcal{M} \neq S^2$). Leur article est basé sur une formule de Polyakov-Alvarez ([Po], [AL]), du nom de deux physiciens dont l'intérêt pour le déterminant du laplacien est lié à ses applications en théorie des cordes :

$$\ln\left(\frac{\det_{\zeta}{}'\Delta_{e^{2\varphi}g}}{\det_{\zeta}{}'\Delta_g}\right) = -\frac{1}{6\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}} \|\nabla\varphi\|_0^2 dv_g + \int_{\mathrm{M}} K_0\varphi dv_g\right\} + \ln\frac{\mathrm{Vol}_\varphi}{\mathrm{Vol}_0},$$

où K_0 est la courbure de Gauss pour g, et Vol_φ est l'aire de $\mathcal{M}$ pour $e^{2\varphi}g$. Une telle formule n'existe malheureusement pas en dimension supérieure,

en partie à cause du fait que le laplacien lui-même ne se comporte plus de manière agréable face à des transformations conformes de métriques.
D'autres travaux ont depuis été réalisés sur le déterminant $\zeta-$ régularisé. Citons-en quelques-uns :

- B. Osgood, R. Phillips et P. Sarnak [OPS2] ont déduit de leurs résultats des théorèmes de compacités pour les surfaces isospectrales.
- K. Okikiolu [O] a obtenu, lorsque la variété est de dimension impaire, des formules de variations premières et secondes du logarithme du $\zeta-$déterminant de Δ_g et du laplacien conforme $L := \Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)}s$, où s est la courbure scalaire de g, à l'intérieur des classes conformes de métriques.
- Dans le cas des surfaces compactes à courbure -1, le déterminant du laplacien est proportionnel à la valeur en 1 de la fonction zeta de Selberg, conséquence directe de la formule des traces. M. Pollicott et A. C. Rocha [P-DR] en ont déduit une expression de $\det_\zeta{}'\Delta_g$ en fonction du spectre des longueurs de $(\mathcal{M}, g)$.

Discrétisation en dimension 1

Dans le cas de la dimension 1, il existe une autre régularisation du déterminant des opérateurs de Schrödinger, appelée déterminant de Feynman et notée $\det_F$:

$$\det_F\left(-\frac{d^2}{dt^2}+V(t)\right)_{\Big|\{f|f(0)=f(1)=0\}} := \det\Big(v\mapsto Y_v(1)\Big), \tag{1}$$

où $t\mapsto V(t)$ est une fonction lisse à valeurs dans les matrices symétriques réelles d'ordre N, et $Y_v:[0,T]\to\mathbb{R}^N$ est l'unique solution de

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2}+V(t)\right)Y_v(t)=0,$$

$$Y_v(0)=0, Y_v'(0)=v.$$

R Forman [Fo1] a prouvé que ces deux régularisations coïncident à une constante multiplicative près qui dépend des conditions au bord :

$$\frac{\det_F A_1}{\det_F A_0}=\frac{\det_\zeta A_1}{\det_\zeta A_0}, \tag{2}$$

où

$$A_i := -\frac{d^2}{dt^2}+V_i(t).$$

Cette formule est remarquable car elle exprime le déterminant $\zeta-$ régularisé d'un opérateur différentiel en fonction du déterminant d'un opérateur

défini sur le bord de $[0,T]$. Le bord étant de dimension 0, cet opérateur est en fait une matrice et le calcul de son déterminant ne nécessite aucune régularisation.
T. Dreyfuss-H. Dym [Dr-Dy], S. Levit-U. Smilansky [L-S] et Y. Colin de Verdière [Cdv1] ont obtenu une formule reliant explicitement le spectre et le déterminant :

Théorème 0.0.1 *Dans le contexte ci-dessus, si $(\lambda_k(A_i))_{k\in\mathbb{N}}$ est le spectre de A_i pour les conditions de Dirichlet (le résultat est donné pour des conditions au bord générales)*

$$\frac{\det_F(A_1)}{\det_F(A_0)} = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_k(A_1)}{\lambda_k(A_0)}. \tag{3}$$

Ce qui peut aussi se lire comme une formule de Stirling :

$$\ln \prod_{k=0}^{n} \lambda_k(A) = 2n\ln n + 2n\left(\ln\frac{\pi}{T} - 1\right) + \ln\frac{T}{\pi} + \ln\det_\zeta(A) + o(1).$$

Nous nous intéresserons a l'idée de la preuve de [Cdv2]. Celle-ci est basée sur la théorie spectrale des opérateurs différentiels de type Schrödinger sur les graphes finis (voir les livres de Y. Colin de Verdière [Cdv2] et Fan Chung [Ch]) :
soit un graphe $G=(S,E)$, où S est l'ensemble des arêtes et E l'ensemble des sommets. Sur l'espace euclidien $\big(\mathbb{R}^S, (\cdot|\cdot)\big)$, on définit un opérateur A symétrique elliptique local. Cet opérateur dépend de la combinatoire de G, d'une métrique $\rho : E \to \mathbb{R}^{+*}$, et éventuellement d'un potentiel $V \in \mathbb{R}^S$. Il possède un spectre, analogue discret du spectre des opérateurs différentiels sur les variétés.

Les propriétés spectrales de ces opérateurs ont des applications dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique : discrétisation par la méthode des éléments finis ([Ci]), processus de Markov ([FY]), limites de laplaciens de surfaces de Riemann à courbure -1 lorsque certaines géodésiques fermées simples ont des longueurs qui tendent vers 0 ([C-Cdv]), spectres de certaines molécules ([COM]). Pour le déterminant du laplacien plus particulièrement, il joue un rôle essentiel dans les modèles de mécanique statistique, comme le modèle des dimères ou celui des arbres maximaux (voir les travaux de R. Kenyon [Ke]). Il existe donc une correspondance entre les opérateurs différentiels sur les variétés d'une part et sur les graphes d'autre part.

En ce qui concerne le $\zeta-$déterminant, la discrétisation des opérateurs différentiels sur $\mathcal{M}$ est pertinente à plusieurs égards :

– Le déterminant sur les graphes est défini sans régularisation, donc plus facilement calculable.

– R. Forman [Fo3] a exprimé le polynôme caractéristique du laplacien sur les graphes en termes d'orbites fermées de flots associés à des champs de vecteurs sur ces graphes , ce qui rejoint le résultat de M.Pollicott et A.C.Rocha sur le flot géodésique des surfaces compactes hyperboliques.

Mais l'argument le plus convaincant en faveur de l'approche des déterminants régularisés via les déterminants de graphe est un résultat dû à D. Burgheela, L. Friedlander, T. Kappeler [BFK1], R. Forman [Fo2] et Y. Colin de Verdière [Cdv1], obtenu par une méthode des éléments finis :
Soit A un opérateur de Sturm-Liouville $A = -\frac{d^2}{dt^2}+V(t)$ sur $[0,T]$. On associe à A par une méthode des éléments finis une suite d'opérateurs différentiels discrets A_n sur une suite de graphes linéaires G_n à n sommets(ou cycliques si les conditions au bord sont périodiques) qui tendent vers $[0,T]$. Alors les auteurs ci-dessus ont montré qu'après normalisation, les déterminants discrets sont des approximations de $\det_F$:

Théorème 0.0.2 *Il existe une constante c dépendant des conditions au bord telle que*

$$\frac{\det A_n}{n^{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} c.\det_F A. \tag{4}$$

Notons que dans le cas des graphes linéaires, le déterminant de A_n est également proportionnel à la valeur au bord d'un vecteur du noyau de A_n, tout comme dans (2). Après le calcul de ce facteur de proportionnalité, les auteurs de [BFK1] et [Cdv1] utilisent qu'une approximation du type Euler de cette équation différentielle converge vers la solution continue. R.Forman prouve quant à lui indépendamment de (2) que $\frac{\det A_n}{n^{2n}}$ converge vers le déterminant $\zeta-$régularisé.

Cas de la dimension 2

La question de la dimension 2 se pose alors naturellement.
La différence fondamentale qu'il existe entre la dimension 1 et les dimensions supérieures provient de l'asymptotique de Weyl : pour un opérateur de Schrödinger A_0 sur une variété compacte de dimension m, il existe une constante C telle que le spectre de A_0 vérifie :

$$\lambda_k(A_0) \sim Ck^{\frac{2}{m}} \text{ lorsque } k \to \infty.$$

De plus, $\lambda_k(A_1)-\lambda_k(A_0) = O(1)$ lorsque $A_1 = A_0+V$, où V est une fonction C^∞ sur $\mathcal{M}$. On en déduit l'estimation

$$\ln\frac{\lambda_k(A_1)}{\lambda_k(A_0)} = O(\frac{1}{k^{\frac{2}{m}}}),$$

qui nous assure de la convergence du produit infini $\prod_{k\geq 0}\frac{\lambda_k(A_1)}{\lambda_k(A_0)}$ en dimension 1, alors qu'il ne dit plus rien dès la dimension 2. L'écriture d'une formule du type (3) sur les surfaces devient plus ardue.

Au niveau de la discrétisation du $\zeta-$déterminant, une autre difficulté apparaît : il existe sur les surfaces des formules comparables à (1)(voir [Fo1]) qui relie les ζ-déterminants de laplaciens aux $\zeta-$déterminants d'opérateurs définis sur le bord ; mais le bord n'étant plus de dimension 0, ces opérateurs ne sont plus de simples matrices. Ce sont des opérateurs agissant sur des variétés de dimension 1. Ils sont pseudo-différentiels, et nécessitent donc aussi d'être régularisés.

Le premier exemple de dimension 2 est dû à B.Duplantier et F.David [Du-Da] qui en s'intéressant à des questions de mécanique statistique, ont été amenés à calculer le développement asymptotique de la suite des déterminants de laplaciens définis sur des discrétisations de rectangles. R.Kenyon l'a généralisé à des ouverts polygonaux du plan dont toutes les arêtes sont parallèles à l'un des axes de coordonnées : soit Ω un tel ouvert, et pour tout réel ϵ positif, notons G_ϵ le sous-graphe de $\epsilon.\mathbb{Z}^2$ constitué des sommets et des arêtes de ce réseau contenus dans Ω. Si Δ_ϵ est le laplacien combinatoire canoniquement associé à G_ϵ, alors le logarithme du produit de ses valeurs propres non nulles vérifie l'asymptotique

$$\ln \det{}' \Delta_\epsilon = \frac{4G}{\pi} N(G_\epsilon) + \frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{2} B(G_\epsilon) - \frac{\pi}{48}(E_\epsilon) + c_5 + o(1),$$

où G et c_5 sont des constantes universelles, $N(G_\epsilon)$ le nombre de sommets de G_ϵ, $B(G_\epsilon)$ le nombre d'arêtes de $\epsilon.\mathbb{Z}^2$ sur le bord de G_ϵ, et E_ϵ l'énergie de Dirichlet $\epsilon-$normalisée d'une fonction associée à la suite de discrétisations G_ϵ.

Nous proposons ici un résultat de convergence de discrétisations de déterminants d'opérateurs de Schrödinger sur des tores de dimension 2.

Théorème 0.0.3 *Soit $\mathcal{M} = S^1 \times S^1$ le tore de dimension 2 muni d'une métrique riemannienne g, et V_1, V_2 deux fonctions C^∞ positives non identiquement nulles sur $\mathcal{M}$. ALors, il existe une suite de triangulations $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_n, E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}$ ne dépendant que de la classe conforme de g, ainsi qu'une suite d'opérateurs laplaciens $\big(\Delta_n : \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^{S_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, discrétisés de Δ_g par une méthode des éléments finis, tels que*

Si $\int_{\mathrm{M}} V_0(x)dv_g(x) = \int_{\mathrm{M}} V_1(x)dv_g(x)$, alors

$$\frac{\det\big(\Delta_n + V_1\big)}{\det\big(\Delta_n + V_0\big)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\det_\zeta\big(\Delta_g + V_1\big)}{\det_\zeta\big(\Delta_g + V_0\big)} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{M}} K_g \Delta_g^{-1}(V_1 - V_0)dv_g\right\},$$

où $K_g : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ est la courbure de Gauss de g.

Lorsque g est plate, le terme $\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{M}} K_g \Delta_g^{-1}(V_1 - V_0)dv_g\right\}$ dans ce théorème est égal à 1, et le rapport des déterminants converge vers le rapport des déterminants régularisés.

Pour obtenir ce résultat, nous reprenons l'approche variationnelle de [Fo2].
Notons

$$A_t := \Delta_g + V_0 + tV,$$

avec $V := V_1 - V_0$. Soit également $A_{t,n}$ le discrétisé de A_t défini sur $\mathbb{R}^{S_n}$, où S_n est l'ensemble des sommets de G_n, $f(t) := \ln\det_\zeta(A_t)$ et $f_n(t) := \ln\det A_{t,n}$.
R. Forman montre

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\ln\det_\zeta A_t &= \mathrm{Trace}(\mathcal{V}\circ A_t^{-1}) \\ &= \int_0^T V(x)G_t(x,x)dx, \end{aligned} \tag{5}$$

où $G_t(x,y)$ est la fonction de Green de l'opérateur A_t, et $\mathcal{V} = \frac{d}{dt}A_t$ est l'opérateur multiplication par la fonction V. Cette formule est bien connue pour les matrices : c'est l'expression de la différentielle du déterminant.

En dimension 1, le résultat (4) est alors obtenu comme corollaire de la convergence uniforme de f_n' vers f' ; la convergence simple est démontrée grâce à des estimations sur les fonctions de Green, et la convergence uniforme comme conséquence de (2).
En dimension 2, A_t^{-1} n'est plus un opérateur à trace : $G_t(x,y)$ présente des singularités logarithmiques sur la diagonale, et (5) n'est plus valable. Cependant, une étude de la variation des fonctions ζ_{A_t} permet d'obtenir le résultat suivant, qui généralise (5) ;

Proposition 0.0.4 (D. Burgheela, L. Friedlander, T. Kappeler [BFK2])

$$\frac{d}{dt}\ln\det_\zeta(A_t) = Fp_{s=0}\mathrm{Trace}\left(\frac{d}{dt}A_t\circ A_t^{-1-s}\right),$$

où $Fp_{s=s_0}\left(\frac{a_{-1}}{s-s_0} + a_0 + a_1(s-s_0) + ...\right) := a_0$.
Dans le cas qui nous intéresse, $\ln\det_\zeta A_t$ est obtenu à partir des valeurs de ζ_{A_t} au voisinage de 0, et le domaine de convergence de ζ_{A_t} est $\{Re(s) > 1\}$, alors que $\frac{d}{dt}\ln\det_\zeta A_t$ est lui lié au comportement de $\mathrm{Trace}(\frac{d}{dt}A_t\circ A_t^{-s})$ au voisinage de 1 et cette fonction possède aussi pour domaine de convergence $\{Re(s) > 1\}$. Dériver permet ainsi de « se rapprocher » du domaine de convergence, dans lequel une approximation des valeurs de ζ par une méthode des éléments finis est rendue possible.

On peut en particulier espérer qu'en dérivant à nouveau, on relie f'' à la vraie trace d'un opérateur. C'est le résultat suivant qui se déduit du précédent grâce au calcul symbolique appliqué aux opérateurs pseudo-différentiels A_t^{-s} :

Lemme 0.0.5

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\det_\zeta A_t = -\mathrm{Trace}\left(\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\circ\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\right)$$

pour tout réel t dans un ouvert contenant $[0,1]$.

Ce résultat (qui est en fait la clé de voûte de ce travail, puisque les théorèmes 0.0.3 et 0.0.6 s'appuient dessus) nous servira à prouver la convergence uniforme de $(f_n'')_{n\in\mathbb{N}}$. L'uniformité sera principalement une conséquence du théorème de Montel.

La dernière étape consiste à montrer la convergence de $(f_n'(0))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f'(0)$ dans le cas où $V_0 = v$ est un potentiel constant (ce qui ne restreint pas les hypothèses du théorème). Nous traitons d'abord le cas où g est plate, en utilisant d'une part la formule

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \ln \det{}_\zeta\Big(\Delta_g + v + tV\Big) = 0 \text{ si } \int V dv_g = 0,$$

et d'autre part le fait que l'on est capable d'exhiber sur $(\mathcal{M}, g)$ une suite de triangulations dont on connaît explicitement le spectre et les fonctions propres, méthode qu'il est évidemment illusoire d'espérer généraliser à une surface riemannienne quelconque. Pour les métriques non plates, nous concluons alors en adaptant la formule de Polyakov aux opérateurs de Schrödinger, ce qui nous permet de nous ramener au cas précédent. Le terme correctif qui apparaît est égal à $\frac{d}{dt}_{|t=0} \ln \det_\zeta A_t$.

Nous obtiendrons comme corollaire de ces formules variationnelles le résultat suivant :

Théorème 0.0.6 *Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété riemannienne compacte sans bord. Soit $V \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}^+)$ un potentiel non nul. Posons $v_0 := \frac{1}{Vol_g(\mathrm{M})}\int_{\mathrm{M}} V dv_g$. Suivant la topologie de $\mathcal{M}$, trois cas de figure peuvent se présenter :*

1. *Si $\mathcal{M} = S^1$,*
$$\det{}_\zeta\big(\Delta_g + V\big) \leq \det{}_\zeta\big(\Delta_g + v_0\big)$$
avec égalité si et seulement si V est un potentiel constant.
2. *Si $\mathcal{M} = S^2$ ou $S^1 \times S^1$, soit $\varphi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, telle que la métrique $e^{2\varphi} g$ soit de courbure constante et de même volume que g. Nous avons l'inégalité*
$$F_g\big(V\big) \leq F_g\big(v_0 e^{2\varphi}\big),$$
où
$$F_g\big(V\big) := \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{M}} \varphi V dv_g\right\} \det{}_\zeta\big(\Delta_g + V\big).$$
Le cas d'égalité n'étant réalisé que si le potentiel $Ve^{-2\varphi}$ est constant.
3. *Si $\mathcal{M}$ est de dimension 3 et si le groupe d'isométries de $(\mathcal{M}, g)$ agit de manière transitive sur $\mathcal{M}$, alors*
$$\det{}_\zeta\big(\Delta_g + V\big) \leq \det{}_\zeta\big(\Delta_g + v_0\big),$$
avec égalité si et seulement si le potentiel V est constant.

En particulier, nous avons comme corollaire :

1. Les potentiels constants sont spectralement rigides sur les variétés riemanniennes suivantes : S^m, pour $m \leq 3$, munies de la métrique canonique, les tores plats de dimension 2 et 3 et les autres variétés de dimension 3 sur lesquelles le groupe d'isométries de g agit de manière transitive.
2. Soit (T^2, g_0) un tore plat de dimension 2, et $\varphi : T^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. Alors, sur T^2 muni de la métrique riemannienne $e^{-2\varphi} g_0$, tout potentiel qui s'écrit $v_0 e^{2\varphi}$, où v_0 est une constante réelle positive est spectralement rigide parmi les potentiels V positifs qui vérifient $\int_{T^2} \varphi(v_0 e^{2\varphi} - V) dv_g \leq 0$.

Enfin, nous donnons en appendice un exemple de rapports de déterminants de laplaciens discrétisés par une méthode des éléments finis, pour deux métriques conformes, qui ne convergent pas vers le rapport des déterminants $\zeta-$régularisés, alors que les spectres discrets convergent vers les spectres de la surface.

Questions ouvertes

– La convergence uniforme des dérivées secondes du logarithme du déterminant est basée sur la proposition (2.2.2) de la page 49. Cette remarque est importante car ce résultat est beaucoup plus général que le cadre que l'on s'est fixé : si $(\mathcal{M}, g)$ est une variété riemannienne compacte avec ou sans bord, de dimension 2 ou 3, il existe toujours une suite de triangulations de $(\mathcal{M}, g)$ sur laquelle on peut définir des laplaciens discrets dont les énergies associées fournissent de bonnes approximations de l'énergie de Dirichlet continue (voir [Ci], ou [DP]) (nous dégageons en début de deuxième chapitre les conditions nécessaires portant sur une suite de triangulations pour que les variations secondes du logarithme des déterminants discrétisés associés convergent). En conséquence de quoi, le résultat sur la convergence des dérivées secondes du logarithme du déterminant est valable aussi sur ces variétés, ce qui conduit à l'existence d'une suite (a_n) de réels indépendante de t telle que
$$\frac{\det A_{t,n}}{\det A_{0,n}} e^{a_n t} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\det_\zeta A_t}{\det_\zeta A_0},$$
ce qui semble malheureusement peu intéressant si nous n'obtenons pas au moins la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquons enfin que la méthode employée ici peut être une piste pour montrer, pour une variété compacte de dimension m, la convergence uniforme de la suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f^{(p)}$ pour $p > \frac{m}{2}$, puisqu'alors
$$f^{(p)}(t) = (-1)^{p-1}(p-1)!\mathrm{Trace}_{L^2}\big(B^p\big)$$

où $B(t) := A' \circ A^{-1}$.

- De même, il serait satisfaisant de pouvoir expliciter de quelle manière la partie divergente dans le développement asymptotique de $(\ln \det A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de la métrique et de l'intégrale du potentiel. Peut-être est-il possible d'adapter le calcul astucieux de B. Duplantier et F. David [Du-Da], qui correspond au cas où le tore $S^1 \times S^1$ est muni d'une métrique produit.
- Le théorème 0.0.6 est lacunaire : sur une variété riemannienne compacte $(\mathcal{M}, g)$ de dimension inférieure ou égale à 3, la fonctionnelle

$$F_{v_0} : \varphi \in C^\infty(\mathcal{M}) \mapsto \ln \det_\zeta \big(\Delta_g + v_0 + \varphi\big)$$

définie dans un voisinage de 0 lorsque $v_0 > 0$, est strictement concave, et diverge en un temps fini vers $-\infty$ dans toute direction. Existe-t-il, comme il semble raisonnable de l'espérer, parmi les potentiels d'intégrale nulle, un unique potentiel maximisant F_{v_0} ?

Chapitre 1

La fonction ζ et le déterminant

Il existe deux approches de la $\zeta-$régularisation des déterminants d'opérateurs elliptiques auto-adjoints. La première utilise l'opérateur de la chaleur associé à A. La fonction ζ s'obtient à partir de la trace de cet opérateur par la transformation de Mellin, et son extension méromorphe à $\mathbb{C}$ est une conséquence de l'asymptotique en temps petits de cette trace. C'est l'approche que nous utilisons dans la partie 1.1 afin de présenter les résultats généraux classiques sur cet invariant spectral.
La deuxième approche consiste à voir la fonction $\zeta_A(s)$ comme la trace de l'opérateur A^{-s}. Ce point de vue sera utile pour obtenir une formule variationnelle seconde du logarithme du déterminant des opérateurs de Schrödinger. Aussi verrons-nous dans la partie 1.2 un théorème de structure des puissances complexes de A, à savoir que A^{-s} est un opérateur pseudo-différentiel classique, et que dans chaque carte, les composantes homogènes de son symbole s'expriment explicitement en fonction du symbole de A.
Dans la partie 1.3, nous reprenons les résultats de P.Gilkey : les variations de ζ_A s'expriment comme des fonctions ζ généralisées, ce qui redonne une démonstration du théorème de D.Burgheela-L.Friedlander-T.Kappeler.
Enfin, dans la partie 1.4, ces calculs sont particularisés au cas des variations de potentiels d'opérateurs de Schrödinger, et nous donnons une démonstration du théorème 0.0.6.

Nous noterons dans tout ce chapitre
• $L^2(\mathcal{M})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes mesurables sur $\mathcal{M}$, et de carré intégrable pour toute mesure induite par une forme volume continue.
• Pour tout réel s, $H^s(\mathcal{M})$ l'espace de Sobolev associé et $\|.\|_s$ une norme de cet espace de Banach. En particulier, $H^0(\mathcal{M}) = L^2(\mathcal{M})$. Les normes induites sur les espaces de Banach des applications linéaires continues $\mathcal{L}_C(H^s, H^t)$, pour tout couple de réels (t, s) seront notées $\|.\|_{s,t}$.
• Pour tout entier k positif, $C^k(\mathcal{M})$ l'espace de Banach des fonctions sur $\mathcal{M}$ à valeurs complexes, k fois différentiables, et dont toutes les dérivées partielles

d'ordre k sont continues. Nous noterons $\|.\|_{k,\infty}$ une norme sur cet espace.

1.1 $\zeta-$ déterminant

Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété riemannienne compacte de dimension m. La métrique g induit une forme volume dv_g sur $\mathcal{M}$, et donc une structure d'espace de Hilbert sur $L^2(\mathcal{M})$, que nous noterons $L^2(\mathcal{M}, dv_g)$ lorqu'il sera utile de préciser la métrique considérée. L'application $\alpha \mapsto \alpha^\sharp$ de $\big(T_x\mathcal{M}\big)^*$ dans $T_x\mathcal{M}$ est l'application canoniquement associée à la métrique riemannienne qui consiste à identifier un espace vectoriel avec son dual via l'identité

$$\alpha_x(X) = g_x(\alpha^\sharp, X), \forall X \in T_x\mathcal{M}.$$

Pour toute fonction différentiable u, le gradient de u est le champ de vecteurs $\nabla u = (du)^\sharp$. Le laplacien Δ_g est alors l'opérateur formellement symétrique associé à la forme quadratique

$$q : u \in C^\infty(\mathcal{M}) \mapsto \int_{\mathrm{M}} g(\nabla u, \nabla u) dv_g \in C^\infty(\mathcal{M}),$$

où $C^\infty(\mathcal{M})$ est muni du produit scalaire induit par l'inclusion $C^\infty(\mathcal{M}) \subset L^2(\mathcal{M})$. Cet opérateur est essentiellement auto-adjoint. Nous noterons aussi Δ_g son unique extension auto-adjointe définie sur un domaine de $L^2(\mathcal{M})$ (voir [G-H-L]). Si u est de classe C^2, et D la connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne g, alors

$$\Delta_g u(x) := -\mathrm{Trace}_{T_x\mathrm{M}}\Big[X \in T_x\mathcal{M} \mapsto D_X(\nabla u)\Big] \in T_x\mathcal{M}.$$

Un opérateur de Schrödinger A sur $\mathcal{M}$ est la donnée d'une métrique g et d'une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ appelée potentiel tels que

$$A : u \in C^\infty(\mathcal{M}) \mapsto \Delta_g u + Vu \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

A est aussi essentiellement auto-adjoint et son symbole principal est la fonction définie sur T^*M par

$$\sigma_2(x, \xi) = g_x(\xi^\sharp, \xi^\sharp), \forall \xi \in T_x^*\mathcal{M}.$$

Il vérifie la condition d'ellipticité $\sigma_2(x, \xi) > 0$, pour tout vecteur $\xi \neq 0$. Alors si on note

$$A_0 : H^2(\mathcal{M}) \subset L^2(\mathcal{M}) \to L^2(\mathcal{M})$$

l'opérateur continu qui étend $A : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$, A_0 est un opérateur autoadjoint non borné sur $L^2(\mathcal{M})$ et il existe dans cet espace un système complet orthonormé $\{\varphi_j, j = 1, 2, ...\}$ de fonctions propres de A_0. Ces fonctions appartiennent à l'espace $C^\infty(\mathcal{M})$. Si on note $\{\lambda_j, j = 1, 2, ...\}$ les valeurs propres associées, elles sont toutes réelles et divergent vers $+\infty$. Enfin, le spectre $\sigma(A)$, c'est-à-dire l'ensemble des complexes z tels que $A_0 - zId$ n'admet pas d'opérateur réciproque borné, coïncide avec l'ensemble des valeurs propres (voir le livre de M.A. Shubin [Sh]).

Dans la suite, nous ne prendrons que des potentiels V positifs, éventuellement nuls, si bien que la forme quadratique

$$q_A(u) := \int_{\mathrm{M}} |\nabla u|^2 + V u^2 dv_g$$

sera positive, ainsi que toutes les valeurs propres de A.

L'équation de la chaleur

Pour ce paragraphe ainsi que le suivant, les démonstrations se trouvent dans les livres de P.B. Gilkey[Gil] et M.A. Shubin [Sh].

Nous allons définir l'opérateur de la chaleur associé à A. Pour ceci, nous avons besoin de la résolvante de A, et d'estimations sur ses normes qui sont fondamentales pour prouver l'existence de l'opérateur de la chaleur et des puissances complexes de A.

Pour tout complexe λ n'appartenant pas au spectre de A, $(A - \lambda)^{-1}$ est un opérateur linéaire continu de H^s dans H^{s+2} pour tout réel s. C'est donc un opérateur compact sur $L^2(\mathcal{M})$. Pour tout $\alpha > 0$, il existe de plus une constante $C(\alpha) > 0$ telle que pour tout complexe λ vérifiant $\alpha \leq \arg(\lambda) \leq 2\pi - \alpha$, nous avons

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{0,0} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \tag{1.1}$$

Soit $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$ et soit γ le bord du domaine $\mathcal{R} = \{\lambda \in \mathbb{C} / -\frac{\pi}{2} + \epsilon \leq \arg(\lambda) \leq \frac{\pi}{2} - \epsilon\}$. Fixons t un réel positif non nul. Le spectre de A étant inclus dans l'intérieur de $\mathcal{R}$,

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \mapsto (A - \lambda)^{-1}$$

défini une fonction holomorphe à valeurs dans l'espace de Banach des endomorphismes continus de $H^0(\mathcal{M})$. Les normes de ces opérateurs sont uniformément bornées indépendamment de $\lambda \in \mathcal{R}$. Nous pouvons alors définir l'opérateur

$$e^{-tA} := (2i\pi)^{-1} \int_\gamma e^{-t\lambda}(A - \lambda)^{-1} d\lambda \in \mathrm{Hom}(H^0, H^0).$$

Cet opérateur est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur : Si f est une fonction C^∞ sur $\mathcal{M}$ et $h(x,t) := e^{-tA}\big(f\big)$ pour tout réel $t > 0$ et tout x dans $\mathcal{M}$, alors

1. $h(x,t)$ est une fonction C^∞ en (x,t) ;
2. $\big(\partial_t + A\big)h(x,t) = 0$;
3. $h(\cdot,t) \to_{t\to 0^+} f(\cdot)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,j}$ pour tout entier j.

e^{-tA} est un opérateur régularisant dont le noyau au sens de Schwartz est C^∞. Grâce à la forme volume dv_g, ce noyau s'identifie à une fonction $e(t,x,y)$ infiniment différentiable sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ qui s'écrit

$$e(t,x,y) = \sum_{n\geq 0} e^{-t\lambda_n}\varphi_n(x)\varphi_n(y).$$

Il existe de plus une suite de fonctions $e_n(\cdot,A)$ C^∞ sur $\mathcal{M}$, dépendant chacune d'un nombre fini de jets du symbole de A, et telles que, pour tout entier N, il existe une constante $C = C_N$ telle que pour tout $t \in]0,1]$,

$$\sup_{x\in \mathrm{M}} \Big| e(t,x,x) - \sum_{n\leq N} e_n(x,A) t^{\frac{n-m}{2}} \Big| \leq C_N t^{\frac{N-m+1}{2}}. \tag{1.2}$$

De plus, $e_n(\cdot,A)$ est identiquement nulle si n est impaire.

L'estimation (1.2) implique le développement asymptotique de Minakshisundaram- Pleijel (voir l'article [McK-S], ou [Gil]) :

$$\mathrm{Trace}_{L^2}\left(e^{-tA}\right) = \sum_{n\leq N-1} a_n(A) t^{\frac{n-m}{2}} + O(t^{\frac{N-m}{2}})$$

pour tout N supérieur à 1, où

$$\begin{aligned} \mathrm{Trace}_{L^2}\left(e^{-tA}\right) &= \int_{\mathrm{M}} e(t,x,x)dv_g(x) = \sum_{k\geq 0} e^{-t\lambda_k(A)} \\ \text{et } a_n(A) &:= \int_{\mathrm{M}} e_n(x,A)dv_g(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Enfin, l'équivalent $\mathrm{Trace}_{L^2}\left(e^{-tA}\right) \sim a_0(A)t^{-\frac{m}{2}}$ en temps petit induit l'asymptotique de Weyl

$$\lambda_k(A) \sim Ck^{\frac{2}{m}}.$$

La fonction ζ_A

Rappelons la définition et quelques résultats sur la fonction Γ d'Euler :

Définition 1.1.1 *Pour tout complexe s de partie réelle strictement positive, soit*

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt.$$

L'équation fonctionnelle
$$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$$
permet d'étendre Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. La formule suivante, qui relie Γ à un produit infini, implique de plus que Γ ne s'annule jamais et qu'elle n'admet que des pôles simples, situés en $0, -1, -2, \dots$:
$$\frac{1}{s\Gamma(s)} = \left(\prod_{k\geq 1}\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}}\right)e^{s\gamma}, \tag{1.4}$$
où γ est la constante d'Euler.

Définissons maintenant la fonction ζ_A introduite par Seeley :
$$\zeta_A(s) := \sum_n{}' \frac{1}{\lambda_n^s}, s \in \mathbb{C}.$$
La notation $\sum'$ signifie que l'on ne somme que sur les valeurs propres non nulles. ζ_A est convergente pour $Re(s) > \frac{m}{2}$. La terminologie de cette fonction s'explique par le fait que lorsque $\mathcal{M} = S^1$ et $A = -\frac{d^2}{dt^2}$, $\zeta_A(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2s}}$ est la fonction zeta de Riemann évaluée en $2s$.

Proposition 1.1.2 *ζ_A admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, holomorphe en 0, avec des pôles d'ordre au plus 1 aux points $\{\frac{m-n}{2}/n \in \mathbb{N}\}$. Le résidu de ζ_A au pôle $\frac{m-n}{2}$ est égal à $a_n(A)$ défini en (1.3).*

Démonstration : Pour $\lambda > 0$, nous avons l'égalité
$$\Gamma(s)\lambda^{-s} = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-\lambda t}dt.$$
Ainsi si $Re(s) > \frac{m}{2}$,
$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta_A(s) &= \int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{Trace}'(e^{-tA})dt \\ &= \int_0^{1} t^{s-1}\mathrm{Trace}'(e^{-tA})dt + \int_1^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{Trace}'(e^{-tA})dt.\end{aligned} \tag{1.5}$$
En vertu de l'asymptotique $\lambda_k \sim Ck^{\frac{2}{m}}$, l'intégrale sur $[1, +\infty[$ est bornée à une constante multiplicative près par l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t\mu_0}$, μ_0 étant la plus petite valeur propre non nulle, donc cette intégrale est une fonction entière de s.

Pour $0 < t < 1$, on utilise l'asymptotique
$$\sum_{k\geq 0} e^{-t\lambda_k} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n t^{\frac{n-m}{2}} + O(t^{\frac{N-m}{2}}), t \to 0^+$$

pour tout $N = 1, 2, \ldots$. Posons $\gamma_0 := \dim \mathrm{Ker}\, A$. $\gamma_0 = 0$ si le potentiel V de $A = \Delta_g + V$ est positif et non identiquement nul, et si $V = 0$, $\dim \mathrm{Ker}\, A$ est égal au nombre de composantes connexes de $\mathcal{M}$.

Alors $\mathrm{Trace}'(e^{-tA}) = \mathrm{Trace}(e^{-tA}) - \gamma_0$, et ainsi l'intégrale sur $[0, 1]$ dans (1.5) se décompose en somme de deux intégrales :

$$\begin{aligned} I_1(s) &:= \int_0^1 t^{s-1} O(t^{\frac{N-m}{2}}) dt, \\ I_2(s) &:= \int_0^1 t^{s-1} \Big(\sum_{n<N} a_n t^{\frac{n-m}{2}} - \gamma_0 \Big) dt. \end{aligned}$$

$I_1(s)$ est une fonction holomorphe sur $Re(s) > \frac{m-N}{2}$, et donc en utilisant l'égalité $\int_0^1 t^{s-1-\alpha} dt = (s - \alpha)^{-1}$ pour $Re(s) > \alpha$, nous obtenons

$$\Gamma(s)\zeta_A(s) = \sum_{n<N} \frac{a_n}{s - \left(\frac{m+n}{2}\right)} - \frac{\gamma_0}{s} + R_N(s), \tag{1.6}$$

où R_N est une fonction holomorphe sur $Re(s) > \frac{m-N}{2}$. Puisque N peut être choisi arbitrairement, la formule (1.6) prouve qu'il existe une extension méromorphe $\Gamma(s)\zeta_A(s)$ à $\mathbb{C}$. Il en est de même de ζ_A, grâce à (1.4). De plus, $s = 0$ est bien un point régulier de ζ_A, puisque $s\Gamma(s) = \Gamma(s + 1)$, et que Γ n'admet aucun zéro. □

Définition 1.1.3 *Le déterminant zeta régularisé de A est*

$$\det{}_\zeta(A) := \exp\left(-\frac{d\zeta_A}{ds}(0)\right).$$

Les propriétés spectrales nécessaires à l'existence du déterminant ζ régularisé de A restent valables lorsque A est plus généralement un opérateur pseudo-différentiel elliptique classique sur un fibré vectoriel dont la base est une variété compacte avec ou sans bord (dans le cas où $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$, il faut également imposer des conditions au bord elliptiques). Voir l'article [Se].

Pour se fixer les idées, particularisons ces calculs au cas où $\mathcal{M}$ est une surface ($m = 2$), et A est le laplacien Δ_g associé à une métrique riemannienne g. Les premiers termes dans le développement asymptotique de Minakshisundaram-Pleijel sont

$$e^{-t\Delta_g} = \frac{1}{4\pi t} + \frac{1}{12\pi} K_g(x) + O(t), t \to 0^+,$$

où $K_g(x)$ est la courbure de Gauss de g au point x.

En appliquant le théorème de Gauss-Bonnet, et en prenant en compte le fait que $\dim\ker A = 1$,

$$\mathrm{Trace}' e^{-t\Delta_g} = \frac{\mathrm{Vol}_{\;g}(M)}{4\pi t} + \left(\frac{\chi(M)}{6} - 1\right) + O(t),$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M. Donc

$$\begin{aligned}\zeta_{\Delta_g}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \mathrm{Trace}' e^{-t\Delta_g} t^{s-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \frac{\mathrm{Vol}_{\;g}(M)}{4\pi(s-1)} + \left(\frac{\chi(M)}{6} - 1\right)\frac{1}{s} + R_4(s) \right\}, \qquad (1.7)\end{aligned}$$

où $R_4(s)$ est holomorphe sur $Re(s) > -1$.

De simples considérations sur la valeur de ζ_{Δ_g} en 0 permettent de se convaincre que le déterminant peut avoir des comportements étonnants vis-à-vis d'opérations élémentaires comme les homothéties. Celui-ci est en effet tributaire de la topologie de la surface, mais aussi de la régularité de $\partial\mathcal{M}$ lorsque $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$.

A partir de la définition du $\zeta-$déterminant, il est clair qu'une multiplication du spectre par λ induit une multiplication du $\zeta-$déterminant par $\lambda^{\zeta(0)}$. Remarquons que pour une surface compacte sans bord (M, g), (1.7) implique que

$$\zeta_{\Delta_g}(0) = \frac{\chi(M)}{6} - 1.$$

Pour une surface compacte à bord lisse, la trace du noyau de la chaleur du laplacien pour les conditions de Dirichlet vérifie

$$\sum_{n\geq 0} e^{-\lambda_n t} = \frac{Vol_g(M)}{4\pi t} - \frac{\int_{\partial M} ds}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{\chi(M)}{6} + O(t), t \to 0^+,$$

où ds est l'élément de longueur d'arc de ∂M induit par la métrique g.
Un calcul analogue à (1.7) nous donne alors

$$\zeta_{\Delta_g}(0) = \frac{\chi(M)}{6}.$$

Enfin, pour un ouvert à bord polygonal du plan, avec toujours le laplacien et les conditions de Dirichlet [McK-S],

$$\zeta(0) = \sum_{\text{angles internes } \gamma} \frac{\pi^2 - \gamma^2}{24\pi\gamma}. \qquad (1.8)$$

Ce qui donne, pour le polygone régulier à n côtés C_n

$$\sum_{\text{angles internes } \gamma} \frac{\pi^2 - \gamma^2}{24\pi\gamma} = \frac{n-1}{6(n-2)}.$$

Dans le tableau suivant, nous résumons pour un certain nombre de surfaces, ce qu'il advient du déterminant lorsque le spectre est multiplié par une constante positive a, c'est-à-dire lorsque la métrique g est divisée par a. Nous noterons $\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ le $\zeta-$déterminant, avec la convention que λ_1 est la première valeur propre non nulle. En particulier, nous voyons que le déterminant peut décroître lorsque l'on multiplie le spectre par une constante supérieure à 1.

Surface	Déterminant
$M = S^2$	$\prod_{n=1}^{\infty} a\lambda_n = a^{-\frac{2}{3}} \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n$
$M = \{\vert z\vert < 1\}$ pour Δ_{dir}	$\prod_{n=1}^{\infty} a\lambda_n = a^{\frac{1}{6}} \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n$
$M = \{1 < \vert z\vert < 2\}$ pour Δ_{dir}	$\prod_{n=1}^{\infty} a\lambda_n = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n$
$M = C_n$ pour Δ_{dir}	$\prod_{n=1}^{\infty} a\lambda_n = a^{\frac{n-1}{6(n-2)}} \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n$

1.2 Les puissances complexes

Pour obtenir une formule variationnelle seconde du déterminant d'une famille d'opérateurs de Schrödinger dont seul le potentiel varie, il est nécessaire d'estimer l'ordre de l'opérateur pseudo-différentiel

$$\frac{d}{dt}\left[(\Delta_g + V_t)^{-s}\right]$$

où V_t est une variation de potentiels. Ce calcul peut se faire avec un théorème de structure des puissances complexes d'opérateurs, que nous présentons ici en suivant le livre de M.A. Shubin [Sh].

L'outil utilisé est le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels (OPD). On exprime les premiers termes du développement asymptotique du symbole de $(\Delta_g + V)^z$ en fonction du symbole de $\Delta_g + V$, afin de mettre en évidence le fait que les deux premiers termes sont indépendants de V.

Définition

Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété riemannienne fermée de dimension m, et V un potentiel positif non nul. On note $A = \Delta_g + V$ l'opérateur de Schrödinger associé et $a_2(x,\xi) = g^{\sharp}(\xi,\xi)$ le symbole principal de A lu dans une carte du fibré cotangent. Soit $\epsilon \in]0,\pi[$ et

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C}^* / -\pi + \epsilon \leq \arg\lambda \leq \pi - \epsilon\} \cup \{0\}.$$

Puisque 0 n'appartient pas au spectre de A, $\sigma(A)$ n'intersecte pas le disque $\{\lambda \in \mathbb{C}/|\lambda| < 2\rho\}$ pour un ρ suffisamment petit. Soit alors dans ce plan, un contour $\Gamma = \Gamma_\rho$ de la forme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, où

$$\begin{aligned}
\lambda &= re^{i(\pi-\epsilon)}\big(+\infty > r > \rho\big) \text{ sur } \Gamma_1, \\
\lambda &= \rho e^{i\varphi}\big(\pi-\epsilon > \varphi > -(\pi-\epsilon)\big) \text{ sur } \Gamma_2, \\
\lambda &= re^{-i(\pi-\epsilon)}\big(\rho < r < +\infty\big) \text{ sur } \Gamma_3.
\end{aligned}$$

Posons, pour tout nombre complexe z,

$$\begin{aligned}
A^z &:= \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^z (A-\lambda I)^{-1} d\lambda, \text{ si } Re(z) < 0, \qquad (1.9)\\
A^z &:= A^k \circ A^{z-k}, \forall k > Re(z),
\end{aligned}$$

où λ^z est défini comme une fonction holomorphe de λ pour $\lambda \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$, égale à $e^{z \ln \lambda}$ pour $\lambda > 0$. Notons que la convergence de l'intégrale (1.9) dans $\mathcal{L}_C(H^0(\mathcal{M}), H^0(\mathcal{M}))$ pour $\mathrm{Re}(z) < 0$ est assurée par l'estimation (1.1) et $|\lambda^z| = |\lambda|^z$. Cette même estimation prouve que, pour de tels nombres complexes z, A^z est un opérateur linéaire borné sur $L^2(\mathcal{M}) = H^0(\mathcal{M})$.

Proposition 1.2.1 *1. L'opérateur A^z est bien défini, indépendamment de la valeur de k.*

2. La propriété de groupe suivante est valable

$$A^z A^w = A^{z+w}, z, w \in \mathbb{C}.$$

3. Si $k \in \mathbb{Z}$, A^k est la puissance $k^{ième}$ usuelle de A.

4. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto A^z$ est holomorphe sur $Re(z) < k$ à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(H^s(\mathcal{M}), H^{s-2k}(\mathcal{M}))$ des opérateurs linéaires bornés de $H^s(\mathcal{M})$ dans $H^{s-2k}(\mathcal{M})$.

De plus, A étant auto-adjoint, il existe un système orthonormé complet $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions propres de A, de valeurs propres $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$, où λ_j croit vers $+\infty$, et $\lambda_0 \geq \delta$. On a une caractérisation spectrale de A^z :

Proposition 1.2.2 *Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$, l'ensemble des distributions sur $\mathcal{M}$, et soit $f = \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j \varphi_j$ la décomposition en série de Fourier de f dans la base $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Alors*

$$A^z f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^z f_j \varphi_j(x).$$

En particulier, $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base de fonctions propres de A^z, de valeurs propres λ_j^z.

Classes de symboles

Nous donnons quelques définitions de classes de symboles d'opérateurs pseudo-différentiels.

A tout symbole $a(x,\xi)$ sur un ouvert X de $\mathbb{R}^m$, dont nous donnons les différentes définitions ci-dessous, on associe un opérateur pseudo-différentiel A sur X par l'intégrale oscillante (voir le livre de M.A. Shubin [Sh] pour la définition de ces intégrales) :

$$Au(x) := \iint e^{i(x-y).\xi} a(x,\xi)u(y)dyd\xi, \text{ pour } u \in C_0^\infty(X).$$

1. Pour tout ouvert X de $\mathbb{R}^m$ et pour tout réel N, $S^N(X)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur $X \times \mathbb{R}^m$ telles que, pour tout multi-indice α et β et tout compact $K \subset X$, il existe des constantes $C_{\alpha,\beta,K}$ telles que

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} a(x,\xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta,K} \left(1+|\xi|\right)^{N-|\alpha|}.$$

   L'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels associés sera noté $L^N(X)$. L'ensemble des symboles possédant une décomposition en composantes homogènes (appelés symboles classiques) sera noté $CS^N(X)$, et l'ensemble des opérateurs associés $CL^N(X)$.

2. Pour tout ouvert X de $\mathbb{R}^m$ et tout couple $(N,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, $S_d^N(X \times \mathbb{R}^m, \Lambda)$ sera l'ensemble des symboles à paramètres sur X, i.e l'ensemble des fonctions

$$a : (x,\xi,\lambda) \in X \times \mathbb{R}^m \times \Lambda \to \mathbb{C}$$

   qui vérifient :

   (a) $(x,\xi) \in X \times \mathbb{R}^m \mapsto a(x,\xi,\lambda_0)$ est C^∞ pour tout λ_0 dans Λ.

   (b) Pour tout multi-indice α et β et tout compact $K \subset X$, il existe des constantes $C_{\alpha,\beta,K}$ telles que

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} a(x,\xi,\lambda) \right| \leq C_{\alpha,\beta,K} \left(1+|\xi|+|\lambda|^{\frac{1}{d}}\right)^{N-|\alpha|}.$$

3. Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^m$, N un complexe, d un réel strictement positif, et Λ un cône de $\mathbb{C}$ de sommet O. On note $CS_d^N(X \times \mathbb{R}^m, \Lambda)$ l'ensemble des fonctions

$$a : (x,\xi,\lambda) \in X \times \mathbb{R}^m \times \Lambda \to \mathbb{C}$$

   telles que, pour tout entier p positif,

$$a(x,\xi,\lambda) - \sum_{j=0}^{p} \theta(|\xi|+|\lambda|^{\frac{1}{d}}) a_{N-j}(x,\xi,\lambda) \in S^{\mathrm{Re}(N)-p-1}(X \times \mathbb{R}^n, \Lambda),$$

   où $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\theta(x) = 0$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$, $\theta(x) = 1$ pour $|x| \geq 1$, et a_{N-j} est positivement homogène de degré $N-j$ en $(\xi, \lambda^{\frac{1}{d}})$, i.e

$$a_{N-j}(x,t\xi,t^d\lambda) = t^{N-j}a_{N-j}(x,\xi,\lambda) \text{ pour tout } t>0.$$

Ces fonctions seront appelées symboles classiques, et les opérateurs classiques correspondants seront notés $CL_d^N(X\times\mathbb{R}^m,\Lambda)$.

4. Tous ces opérateurs peuvent être définis sur une variété compacte $\mathcal{M}$. Nous utiliserons alors les mêmes notations en remplaçant X par $\mathcal{M}$.

Structure des puissances complexes d'un opérateur elliptique

Nous donnons ici quelques résultats techniques sur la structure des puissances complexes de A. Dans chaque carte de la variété, les symboles des opérateurs A^z possèdent une décomposition en composantes homogènes.

Nous expliquons brièvement comment construire un paramétrix de $A-\lambda I$ qui soit aussi un opérateur pseudo-différentiel classique de $CL_2^{-2}(\mathcal{M},\Lambda)$.

Rappelons qu'un parametrix B_λ de $A-\lambda I$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -2 tel qu'il existe des opérateurs régularisants $R_1(\lambda)$ et $R_2(\lambda)$ vérifiant

$$(A-\lambda I)B_\lambda = I + R_1(\lambda), \qquad B_\lambda(A-\lambda I) = I + R_2(\lambda).$$

Soit une carte $X\subset\mathcal{M}$, que nous identifions à un ouvert de $\mathbb{R}^m$ via un système de coordonnées. $A-\lambda I$ s'écrit alors

$$A = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x)D^\alpha - \lambda.$$

Son symbole total

$$a(x,\xi,\lambda) = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x)\xi^\alpha - \lambda$$

peut se décomposer en composantes homogènes en $(\xi,\lambda^{\frac{1}{2}})$ données par les formules

$$\begin{aligned} a_2(x,\xi,\lambda) &= \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha - \lambda, \text{ et} \\ a_j(x,\xi,\lambda) &= \sum_{|\alpha|=j} a_j(x)\xi^\alpha \text{ pour } j=0 \text{ et } 1. \end{aligned}$$

Donc $A-\lambda I$ est un élément de $CL_2^2(X\times\mathbb{R}^n,\Lambda)$.

Si l'on cherche le symbole d'un parametrix de $A-\lambda I$ sous la forme d'une somme asymptotique de composantes homogènes $b^0_{-2-j}(x,\xi,\lambda), j=0,1,2,\ldots$ de degrés $-2-j$.

Les fonctions $b^0_{-2-j}(x,\xi,\lambda)$ sont alors définies par les relations de récurrence

$$a_2(x,\xi,\lambda)b^0_{-2}(x,\xi,\lambda) = 1,$$

et, pour tout $j = 1, 2, ...,$

$$a_2(x,\xi,\lambda)b^0_{-2-j}(x,\xi,\lambda) + \sum_{k+l+|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi a_{2-k}(x,\xi,\lambda)D^\alpha_x b^0_{-2-l}(x,\xi,\lambda) = 0.$$

Pour finalement obtenir un paramétrix, on pose pour $j = 0, 1, 2, ..$

$$b_{-2-j}(x,\xi,\lambda) = \theta(|\xi| + |\lambda|^{\frac{1}{2}})b^0_{-2-j}(x,\xi,\lambda),$$

où θ est donnée dans la définition précédente, afin d'éliminer ses singularités en $|\xi|+|\lambda|^{\frac{1}{2}} = 0$, puis on recolle les paramétrix locaux à l'aide d'une partition de l'unité de la manière suivante :

Soit $\mathcal{M} = U_\gamma X^\gamma$ un recouvrement fini de $\mathcal{M}$ par des cartes, φ^γ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement et $\psi^\gamma \in C^\infty_0(X^\gamma)$ telle que $\psi^\gamma = 1$ sur un voisinage du support de φ^γ. De plus, soient Φ^γ et Ψ^γ les opérateurs de multiplication par φ^γ et ψ^γ et $B^\gamma_{-2-j}(\lambda)$ un OPD sur X^γ de symbol $b^\gamma_{-2-j}(x,\xi,\lambda)$ construit ci-dessus dans l'ouvert X^γ. Soit maintenant

$$B_{-2-j}(\lambda) = \sum_\gamma \Phi^\gamma B^\gamma_{-2-j}(\lambda)\Psi^\gamma$$

$$\text{et } B_{(N)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} B_{-2-j}(\lambda). \tag{1.10}$$

L'écriture de $B_{(N)}(\lambda)$ dans chaque carte nous convainc alors du résultat suivant :

Proposition 1.2.3

$$(A - \lambda I)^{-1} - B_{(N)}(\lambda) \in CL_2^{-2-N}(\mathcal{M}, \Lambda).$$

Nous allons à l'aide des symboles ci-dessus contruire les composantes homogènes $b^{(z),0}_{2z-j}(x,\xi)$ du symbole de A^z. Il existe $\rho = \rho(x,\xi) > 0$ tel que $a_2(x,\xi,\lambda) \neq 0$ pour $|\lambda| < 2\rho, \xi \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Les fonctions $b_{-2-j}(x,\xi,\lambda)$ sont holomorphes en λ dans le disque $|\lambda| < 2\rho$. En reprenant le contour Γ précédent, on définit pour $Re(z) < 0$ et $j \in \mathbb{N}$:

$$b^{(z),0}_{2z-j}(x,\xi) = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^z b^0_{-2-j}(x,\xi,\lambda)d\lambda.$$

L'indice représente toujours le degré d'homogénéité ; en effet, $b^{(z),0}_{2z-j}(x,\xi)$ est positivement homogène en ξ de degré $2z - j$:

$$b^{(z),0}_{2z-j}(x,t\xi) = t^{2z-j}b^{(z),0}_{2z-j}(x,\xi), t > 0, \xi \neq 0.$$

Il est possible d'étendre la définition de ces fonctions à tout $z \in \mathbb{C}$. On pose à nouveau

$$b^{(z)}_{2z-j}(x,\xi) = \theta(|\xi|) b^{(z),0}_{2z-j}(x,\xi).$$

Cette construction peut être faite dans tout ouvert de carte X^γ. Si $B^{(z),\gamma}_{2z-j}$ est l'opérateur sur X^γ de symbole $b^{(z),\gamma}_{2z-j}(x,\xi)$, on pose à nouveau

$$B^{(z)}_{2z-j} = \sum_\gamma \Phi^\gamma B^{(z),\gamma}_{2z-j} \Psi^\gamma,$$

et

$$B^{(z)}_{(N)} = \sum_{j=0}^{N} B^{(z)}_{2z-j}.$$

Proposition 1.2.4 *Pour tout réel z,*

$$A^z \in CL^{2z}(\mathcal{M}),$$

et, pour tout entier N positif et tout réel $p > Re(z)$,

$$A^z - B^{(z)}_{(N)} \in L^{2p-N}(\mathcal{M}).$$

Ainsi, l'estimation de l'ordre d'un opérateur $\frac{d}{d\epsilon}\left(A^z_\epsilon\right)$, où A_ϵ est une famille lisse à un paramètre d'opérateurs de Schrödinger, se ramène à l'estimation de celui de $\frac{d}{d\epsilon} B^{(z)}_{(N),\epsilon}$ dont nous connaissons explicitement les composantes du symbole, en fonction de celles de A. Nous nous servons de cette proposition dans la démonstration du lemme suivant :

Lemme 1.2.5 *Soit $\mathcal{M}$ une variété fermée munie d'une métrique riemannienne g. Soient t_0 un réel, V_0 et V deux fonctions C^∞ sur $\mathcal{M}$ telles que l'opérateur de Schrödinger $\Delta_g + V_0 + t_0 V$ ait un spectre strictement positif. Alors, pour tout complexe z, l'opérateur*

$$\frac{d}{dt}_{|t=t_0}\left(\left(\Delta_g + V_0 + tV\right)^z\right)$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $2p-2$ pour tout p strictement plus grand que la partie réelle de z.

Démonstration : Posons, pour tout t dans un voisinage I de t_0,

$A_t := \Delta_g + V_0 + tV$. Choisissons I de telle manière que le spectre de A_t soit strictement positif pour tout t dans I. On note $b^0_{-2-j,t}(x,\xi,\lambda)$, pour $j = 0, 1, 2, \ldots$, les composantes homogènes d'un développement asymptotique du symbole d'un paramétrix de A_t, et

$$\begin{aligned}
a_2(x,\xi,\lambda) &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(x)\partial_i\partial_j - \lambda^{\frac{1}{2}},\\
a_1(x,\xi,\lambda) &= -\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_j(g^{ij}\sqrt{G})\partial_i,\\
a_0(x,\xi,\lambda) &= V_0(x) + tV(x),
\end{aligned}$$

où $(\partial_i)_{1\leq i\leq m} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq m}$ correspond aux dérivées partielles dans la direction des fonctions coordonnées, $\left(g^{ij}(x)\right)_{1\leq i,j\leq m}$ est la matrice de la métrique sur $\left(T_x\mathcal{M}\right)^*$ lue dans la carte et $G = \det g^{ij}$. Alors

$$\begin{aligned} b^0_{-2,t}(x,\xi,\lambda) &= \left(a_2(x,\xi,\lambda)\right)^{-1}, \\ b^0_{-3,t}(x,\xi,\lambda) &= -\left(a_2(x,\xi,\lambda)\right)^{-1}\Big[a_1(x,\xi,\lambda)b^0_{-2,t}(x,\xi,\lambda) \\ &+ \sum_{i=1}^m \partial_{\xi_i}a_2(x,\xi,\lambda)D_{x_i}b^0_{-2,t}(x,\xi,\lambda)\Big] \end{aligned}$$

ne dépendent donc pas de t, tout comme les deux premières composantes homogènes $b^{(z),0}_{2z,t}(x,\xi)$ et $b^{(z),0}_{2z-1,t}(x,\xi)$ du symbole de A^z_t, en vertu des relations

$$b^{(z),0}_{2z-j,t}(x,\xi) = \frac{i}{\pi}\int_\Gamma \lambda^z b^0_{-2-j,t}(x,\xi,\lambda)d\lambda.$$

Notons $B^{(z)}_{(N),t}$ l'opérateur qui vérifie, d'après la proposition 1.2.4,

$$A^z_t - B^{(z)}_{(N),t} \in L^{2p-N}(\mathcal{M}), \forall p > Re(z). \tag{1.11}$$

Le symbole de $B^{(z)}_{(2),t}$ dans chaque carte s'écrit

$$\varphi(x)\left(b^{(z)}_{2z,t}(x,\xi) + b^{(z)}_{2z-1,t}(x,\xi)\right)\psi(x).$$

Cette famille d'opérateurs est donc indépendante de t :

$$\frac{d}{dt}B^{(z)}_{(2),t} = 0, \text{ pour tout } t \in I.$$

Combiné avec (1.11), nous obtenons ainsi que pour tout t dans I,

$$\frac{d}{dt}A^z_t \in L^{2p-2}(\mathcal{M}), \forall p > Re(z).$$

□

1.3 Les fonctions ζ généralisées

Peter Gilkey [Gil] a établi des formules variationnelles des fonctions ζ associées à une famille $A(\epsilon)$ à 1 paramètre d'opérateurs différentiels elliptiques auto-adjoints. Celles-ci font intervenir des fonctions ζ généralisées dépendant de $A(\epsilon)$ et de $\frac{d}{d\epsilon}A(\epsilon)$. Ses démonstrations s'appuient principalement sur la trace du noyau de la chaleur de A et son développement asymptotique de Minakshisundaram-Pleijel. Ces formules redonnent une démonstration du théorème de D. Burgheela, L. Friedlander et T. Kappeler sur la dérivée première du logarithme du déterminant de $A(\epsilon)$. Nous redonnons ici ses résultats dans le cas particulier qui nous intéresse.

1.3.1 Variations de ζ_{A_t}

On note à nouveau $A = \Delta_g + V$ un opérateur de Schrödinger sur une variété fermée M de dimension m, $dv_g(x)$ la forme volume induite par la métrique g sur $\mathcal{M}$, $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé complet de fonctions propres de A, de valeurs propres associées $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$, où λ_j croit vers $+\infty$ Nous supposerons que $\lambda_0 > 0$. Rappelons qu'il existe une suite de fonctions $\Big(e_n(.,A)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathcal{M}$ qui vérifient la relation (1.2) : pour tout entier k il existe un entier $N = N(k)$ et une constante $C = C_k$ tels que

$$\Big\|e(t,x,x) - \sum_{n\leq N} e_n(x,A)t^{\frac{n-m}{2}}\Big\|_{k,\infty} \leq C_k t^k.$$

Nous pouvons définir les puissances complexes A^z de A. Le noyau de Schwartz $K = K_s(x,y,A)$ de A^{-s} vérifie

$$K_s(x,y,A) = \sum_{\nu\geq 0} \lambda_\nu^{-s}\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)$$

Soit $\mathcal{V}$ un opérateur différentiel d'ordre 0 sur $\mathcal{M}$, c'est-à-dire l'opérateur multiplication par une fonction V C^∞ sur $\mathcal{M}$. Le noyau de $\mathcal{V}\circ A^{-s}$ est alors égal à

$$K_s(x,y,A,\mathcal{V}) = \sum_{\nu\geq 0} \lambda_\nu^{-s} V(x)\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)$$

Pour tout entier j, il existe un réel $C_j > 0$ tel que cette série converge uniformément et absolument pour la norme $\|.\|_{j,\infty}$ sur $Re(s) > C_j$.

Notons $\Pi(\lambda, A)$ la projection orthogonale de $L^2(\mathcal{M})$ sur Ker $(A - \lambda I)$.

Les théorèmes 1.3.1 et 1.3.3 donnent des formules de variations premières respectivement de la trace de l'opérateur de la chaleur et de la fonction ζ associées à une famille d'opérateurs de Schrödinger du type

$$A_\epsilon := \Delta_g + V_0 + \epsilon V.$$

Celles-ci seront utiles pour établir les résultats qui suivront sur les rapports de déterminants.

Théorème 1.3.1 (P.Gilkey, Page 75-77) *L'opérateur $\mathcal{V}\circ e^{-tA}$ est un opérateur régularisant.*

1. *Soit, pour tout entier n, $a_n(A,\mathcal{V}) := \int_{\mathrm{M}} V(x)e_n(x,A)dv_g$. Alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{Trace}(\mathcal{V}\circ e^{-tA}) &= \sum_\lambda \mathrm{Trace}(\Pi(\lambda,A)\circ\mathcal{V})e^{-t\lambda}, & (1.12)\\ &\sim \sum_{n\geq 0} a_n(A,\mathcal{V})t^{\frac{n-m}{2}}. & (1.13)\end{aligned}$$

2. *Soit V_0 un deuxième potentiel, et I un intervalle réel où $V_0 + \epsilon V$ est positif non identiquement nul. Posons $\epsilon \in I \mapsto A_\epsilon := \Delta_g + V_0 + \epsilon V$. Alors les fonctions $\epsilon \mapsto a_n(A_\epsilon, \mathcal{V})$ sont lisses. De plus, pour tout $\epsilon \in I$,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}\mathrm{Trace}\Big(e^{-tA_\epsilon}\Big) &= -t\mathrm{Trace}\Big(\mathcal{V} \circ e^{-tA_\epsilon}\Big) \\ &\sim \sum_{n\geq 0}\left(\frac{d}{d\epsilon}a_n(A_\epsilon, \mathcal{V})\right) t^{\frac{n-m}{2}}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

La notation $\sim$ dans (1.14) signifie que pour tout entier k positif, il existe une constante c_k indépendante de ϵ (au moins localement) telle que

$$\left|\frac{d}{d\epsilon}\mathrm{Trace}\Big(e^{-tA_\epsilon}\Big) - \sum_{n=0}^{k}\left(\frac{d}{d\epsilon}a_n(A_\epsilon, \mathcal{V})\right) t^{\frac{n-m}{2}}\right| \leq c_k t^{\frac{k+1-m}{2}},$$

pour tout couple (t, ϵ) de $]0, 1] \times I$.

Définition 1.3.2 *On définit la fonction généralisée zeta*

$$\begin{aligned} \zeta(s, A, \mathcal{V}) &:= \mathrm{Trace}_{L^2}(\mathcal{V} \circ A^{-s}) = \sum_{\lambda>0}\mathrm{Trace}(\Pi(\lambda, A) \circ \mathcal{V})\lambda^{-s} \\ &= \int_M K_s(x, x, A, \mathcal{V})dv_g(x). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Notons que $\zeta(s, A, Id) = \zeta_A(s)$. L'asymptotique de Weil implique la convergence uniforme et absolue de la série (1.15) pour $Re(s) > \frac{m}{2}$.

Théorème 1.3.3 1. *Si $Re(s) > \frac{m}{2}$, alors*

$$\zeta(s, A, \mathcal{V}) = \Gamma(s)^{-1}\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{Trace}_{L^2}(\mathcal{V} \circ e^{-tA})dt. \tag{1.16}$$

2. *$\Gamma(s)\zeta(s, A, \mathcal{V})$ a une extension méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles simples isolés en $s = \frac{m-n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et*

$$Res_{s=\frac{m-n}{2}}\Gamma(s)\zeta(s, A, \mathcal{V}) = a_n(A, \mathcal{V}). \tag{1.17}$$

3. *Soit $A_\epsilon := \Delta_g + V_0 + \epsilon V$. Si la première valeur propre de A_{ϵ_0} est non nulle, alors $\zeta(s, A_\epsilon, \mathcal{V})$ est lisse au voisinage de (s, ϵ_0) sauf a priori en les valeurs $s = \frac{m-n}{2}$.*
4. *De plus,*

$$\frac{d}{d\epsilon}\zeta_{A_\epsilon}(s) = -s\zeta(s+1, A_\epsilon, \mathcal{V}).$$

Remarque : Soit s un entier positif ou nul. Γ a alors un pôle simple en $-s$ de résidu non nul. D'après (1.17), ζ est régulière en $-s$ et sa valeur est localement calculable. En particulier, puisque $Res_{s=0}\Gamma(s) = 1$, ζ est régulière en 0 et

$$\zeta(0, A, \mathcal{V}) = a_2(A, \mathcal{V}).$$

1.3.2 Variations du $\zeta-$déterminant

A nouveau, posons

$$A_t := \Delta_g + V_0 + tV,$$

pour tout t dans un intervalle I où le spectre de A_t est strictement positif.

Revenons au déterminant $\zeta-$régularisé

$$\det{}_\zeta A_t = e^{-\frac{d}{ds}\zeta_{A_t}(0)},$$

où $\zeta_{A_t}(s) = \zeta(s, A_t, Id)$.

Théorème 1.3.4 (D.Burgheela- L.Friedlander- T.Kappeler)
$t \in I \mapsto \det_\zeta A_t$ est une fonction lisse et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\ln\det A_t &= Fp_{s=0}\zeta(s, A_t, \mathcal{V})\\ &= Fp_{s=0}\mathrm{Trace}(\mathcal{V}\circ A_t^{-1-s}),\end{aligned}$$

où $Fp_{s=s_0}\left(\frac{a_{-1}}{s-s_0} + a_0 + a_1(s-s_0) + ...\right) := a_0$.

En effet, $\ln\det_\zeta A_t$ est le résidu en 0 de la fonction $s \mapsto -\frac{1}{s^2}\zeta_{A_t}(s)$:

$$\ln\det{}_\zeta A_t = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{s^2}\zeta_{A_t} ds$$

où γ est le cercle centré en 0 de rayon $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\ln\det A_t &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{s^2}\frac{d}{dt}\zeta_{A_t}(s)ds\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{s}\zeta(s+1, A_t, \mathcal{V})ds\\ &= \mathrm{Fp}_{s=0}\zeta(s+1, A_t, \mathcal{V}).\end{aligned}$$

□

1.4 Les opérateurs de Schrödinger

Dans cette partie, $(\mathcal{M}^m, g)$ sera une variété riemannienne compacte d'ordre m, V et V_0 deux potentiels sur $\mathcal{M}$ tels que pour tout t dans un intervalle I de $[0,1]$,

$$A_t := \Delta_g + V_0 + tV$$

soit un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2, auto-adjoint, injectif et positif. La fonction

$$\zeta_{A_t}(s) := \mathrm{Trace}(A_t^{-s})$$

est bien définie pour $s > \frac{m}{2}$, et s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, qui ne possède pas de pôle en 0. Pour tout $t \in [0,1]$, on peut donc poser

$$\det_\zeta(A_t) := e^{-\frac{d}{ds}\zeta_{A_t}(0)}.$$

A_t possède un système orthonormée complet de fonction propres $\big(\varphi_{k,t}\big)_{k\geq 1}$, de valeurs propres associées $\big(\lambda_{k,t}\big)_{k\geq 1}$, qui croissent avec k.

Nous noterons également

$$\mathcal{V} := \frac{d}{dt}A_t : f \in L^2(\mathcal{M}) \mapsto Vf \in L^2(\mathcal{M}),$$

l'opérateur dérivée de A_t pour la topologie forte sur les opérateurs.

1.4.1 Les petites dimensions

Nous commençons par prouver un lemme autour duquel s'articuleront tous les résultats qui suivent.

Lemme 1.4.1 *Si $\mathcal{M}$ est de dimension $m \leq 3$, alors pour tout réel t dans I,*

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\det_\zeta\Big(\Delta_g + V_0 + tV\Big) = -\mathrm{Trace}\Big(\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\circ\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\Big).$$

Corollaire 1.4.2 *Si $\mathcal{M}$ est de dimension $m \leq 3$, alors*

$$t \in I \mapsto \ln\det_\zeta\big(\Delta_g + V_0 + tV\big)$$

est strictement concave si V n'est pas le potentiel nul.

Démonstration du corollaire 1.4.2 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}\Big(\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\circ\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\Big) &= \sum_{k\geq 0}\big(\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\circ\mathcal{V}\circ A_t^{-1}(\varphi_{k,t}),\varphi_{k,t}\big)\\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{\Big(\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\circ\mathcal{V}(\varphi_{k,t}),\varphi_{k,t}\Big)}{\lambda_{k,t}}\\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{\big(A_t^{-1}(V\varphi_{k,t}),V\varphi_{k,t}\big)}{\lambda_{k,t}} > 0,
\end{aligned}$$

car A_t^{-1} est un opérateur strictement positif, et V est non nul. □

Démonstration du lemme 1.4.1 : D'après le théorème 1.3.4,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\ln\det_\zeta\Big(\Delta_g + V_0 + tV\Big) &= \frac{d}{dt}\Big[FP_{s=0}\mathrm{Trace}\big(\mathcal{V}\circ A_t^{-s-1}\big)\Big]\\
&= FP_{s=0}\mathrm{Trace}\mathcal{V}\circ\big(\frac{d}{dt}(A_t^{-1})\big)\circ A_t^{-s}\\
&+ FP_{s=0}\mathrm{Trace}\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\circ\frac{d}{dt}(A_t^{-s}).
\end{aligned}$$

Or $\mathcal{V} \circ \left(\frac{d}{dt}(A_t^{-1})\right) \circ A_t^{-s} = -\mathcal{V} \circ A_t^{-1} \circ \mathcal{V} \circ A_t^{-1-s}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-4-2s$. C'est par conséquent un opérateur à trace sur $L^2(\mathcal{M})$ pour tout $Re(s) > \frac{m-4}{2}$. Sous la condition $m < 4$, $s = 0$ appartient à ce domaine de convergence, et donc

$$\begin{aligned} Fp_{s=0}\mathrm{Trace}\Big[\mathcal{V} \circ \big(\frac{d}{dt}(A_t^{-1})\big) \circ A_t^{-s}\Big] &= \mathrm{Trace}\Big[\mathcal{V} \circ \big(\frac{d}{dt}(A_t^{-1})\big) \circ A_t^{0}\Big] \\ &= -\mathrm{Trace}\Big[\mathcal{V} \circ A_t^{-1} \circ \mathcal{V} \circ A_t^{-1}\Big]. \end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 1.2.5, l'opérateur $\frac{d}{dt}\big(A_t^{-s}\big)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-2-2s+\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$.

L'ordre de $\mathcal{V} \circ A_t^{-1} \circ \frac{d}{dt}\Big(A_t^{-s}\Big)$ est donc $-3.5-2\mathrm{Re}(s)$. Donc, pour $m \leq 3$, cet opérateur est d'ordre strictement inférieur à $-m$ pour tout s dans un voisinage de 0. Il est par conséquent à trace et

$$\begin{aligned} Fp_{s=0}\mathrm{Trace}\Big(\mathcal{V} \circ A_t^{-1} \circ \frac{d}{dt}\big(A_t^{-s}\big)\Big) &= \mathrm{Trace}\Big(\mathcal{V} \circ A_t^{-1} \circ \frac{d}{dt}\Big(A_t^{-s}\Big)\Big)_{|s=0} \\ &= 0 \text{ car } A_t^0 = Id_{L^2(\mathrm{M})}. \end{aligned}$$

□

Nous avons besoin d'un dernier résultat avant de démontrer le théorème 0.0.6. Il s'agit d'une adaptation de la formule de Polyakov au cas des opérateurs de Schrödinger mais qui n'explicite malheureusement pas la dépendance du $\zeta-$déterminant par rapport au potentiel. Précisément, nous avons :

Proposition 1.4.3 *Soit $(\mathcal{M}, g_0)$ une surface riemannienne compacte sans bord. Soit V un potentiel C^∞ positif non nul sur $\mathcal{M}$ et φ une fonction C^∞ sur $\mathcal{M}$. Alors, si $A := \Delta_{g_0} + V$, nous avons la relation*

$$\ln \frac{\det_\zeta e^{-2\varphi} A}{\det_\zeta A} = -\frac{1}{6\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}} |\nabla_0 f|^2 dv_0 + \int_{\mathrm{M}} K_0 \varphi dv_0 - 3\int_{\mathrm{M}} V\varphi dv_0\right] \quad (1.18)$$

où dv_0 est la mesure volume de la métrique g_0, K_0 sa courbure de Gauss, et $\int_{\mathrm{M}} |\nabla_0 \varphi|^2 dv_0$ l'énergie de Dirichlet de φ pour la métrique g_0.

Remarques :

1. Si g est la métrique $e^{2\varphi} g_0$, $e^{-2\varphi} A = \Delta_g + e^{-2\varphi} V$ est bien un opérateur de Schrödinger dont le potentiel est positif non nul : cet opérateur a donc un déterminant $\zeta-$régularisé.
2. La démonstration est identique à la démonstration de la formule de polyakov, telle qu'elle est faite dans l'article [OPS1].

Démonstration : Posons pour tout ϵ réel, $g_\epsilon := e^{2\epsilon\varphi} g_0$, et

$$A_\epsilon := \Delta_{g_\epsilon} + e^{-2\epsilon\varphi} V = e^{-2\epsilon\varphi}(\Delta_{g_0} + V).$$

Alors si dv_ϵ est la mesure volume de g_ϵ, K_ϵ la courbure de Gauss associée à g_ϵ, et $\mathcal{N}_\epsilon dv_\epsilon = \mathcal{N}_\epsilon(t,x,y) dv_\epsilon$ le noyau de Schwartz de l'opérateur e^{-tA_ϵ}, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
dv_\epsilon &= e^{2\epsilon\varphi} dv_0, \\
K_\epsilon &= e^{-2\epsilon\varphi}\big(\Delta_{g_0}(\epsilon\varphi) + K_0\big), \qquad (1.19)\\
\mathcal{N}_\epsilon(t,x,x) &= \frac{1}{4\pi t} + \left(\frac{K_\epsilon}{12\pi} - \frac{V e^{-2\epsilon\varphi}}{4\pi}\right) + O(t), \text{ quand } t \to 0^+. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Dans (1.20), toutes les fonctions du membre de droite sont évaluées au point x de $\mathcal{M}$. Cette relation se trouve en page 334 du livre de P.B.Gilkey ([Gil], lemme 4.1.4). La formule variationnelle (1.21) s'y trouve également, en page 77 (lemme 1.9.3).
Soit enfin

$$\zeta_\epsilon(s) = \text{Trace}\left(A_\epsilon^{-s}\right) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \text{Trace}\left(e^{-tA_\epsilon}\right) dt.$$

Alors,

$$\frac{d}{d\epsilon}\zeta_\epsilon(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{d}{d\epsilon} \text{Trace}\left(e^{-tA_\epsilon}\right) dt.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}\text{Trace}\left(e^{-tA_\epsilon}\right) &= \text{Trace}\left(-t\left(\frac{d}{d\epsilon}A_\epsilon\right) e^{-tA_\epsilon}\right) \qquad (1.21)\\
&= -t\,\text{Trace}\left(-2\varphi A_\epsilon e^{-tA_\epsilon}\right) \\
&= -2t \frac{d}{dt} \text{Trace}\left(\varphi e^{-tA_\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}\zeta_\epsilon(s) &= -\frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^s \frac{d}{dt} \text{Trace}\left(\varphi e^{-tA_\epsilon}\right) dt \\
&= \frac{2s}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \text{Trace}\left(\varphi e^{-tA_\epsilon}\right) dt.
\end{aligned}$$

Au voisinage de $s = 0$, $\frac{d}{d\epsilon}\zeta_\epsilon(s)$ est régulière, et $\frac{s}{\Gamma(s)} \sim s^2$. Donc,

$$\frac{d}{d\epsilon}\frac{d}{ds}_{|s=0} \zeta_\epsilon(s) = 2\text{Res}_{s=0} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \text{Trace}\left(\varphi e^{-tA_\epsilon}\right) dt.$$

La fonction holomorphe $s \mapsto \int_1^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{Trace}\left(\varphi e^{-tA_\epsilon}\right) dt$ est entière car

$$\mathrm{Trace}\left(\varphi e^{-tA_\epsilon}\right) = O(e^{-\mu t}) \text{ lorsque } t \to +\infty,$$

où μ est la première valeur propre de A_ϵ. Ainsi,

$$\frac{d}{d\epsilon}\frac{d}{ds}_{|s=0}\zeta_\epsilon(s) = 2\mathrm{Res}_{s=0}\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{Trace}\left(\varphi e^{-tA_\epsilon}\right) dt. \tag{1.22}$$

Mais d'après (1.20),

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}\left(\varphi e^{-tA_\epsilon}\right) &= \int_{\mathrm{M}} \mathcal{N}_\epsilon(t,x,x)\varphi(x)dv_\epsilon(x)\\ &= \frac{1}{4\pi t}\int_{\mathrm{M}}\varphi dv_\epsilon + \frac{1}{12\pi}\int_{\mathrm{M}}\varphi K_\epsilon dv_\epsilon - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{M}}\varphi V e^{-2\epsilon\varphi}dv_\epsilon + O(t),\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{Trace}\left(\varphi e^{-tA_\epsilon}\right) dt &= \frac{1}{12\pi s}\left(\int_{\mathrm{M}}\varphi K_\epsilon dv_\epsilon - 3\int_{\mathrm{M}}\varphi V e^{-2\epsilon\varphi}dv_\epsilon\right)\\ &+ \frac{\int_{\mathrm{M}}\varphi dv_\epsilon}{4\pi(s-1)} + R_\epsilon(s),\end{aligned} \tag{1.23}$$

où $s \mapsto R_\epsilon(s)$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > -1$. Alors, par définition du $\zeta-$déterminant, et en tenant compte respectivement de (1.22), (1.23) et (1.19),

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}\ln\det{}_\zeta A_\epsilon &= -\frac{d}{d\epsilon}\frac{d}{ds}_{|s=0}\zeta_\epsilon(s)\\ &= -2\mathrm{Res}_{s=0}\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{Trace}\left(\varphi e^{-tA_\epsilon}\right) dt\\ &= -\frac{1}{6\pi}\left\{\int_{\mathrm{M}}\varphi K_\epsilon dv_\epsilon - 3\int_{\mathrm{M}}\varphi V e^{-2\epsilon\varphi}dv_\epsilon\right\}\\ &= -\frac{1}{6\pi}\left\{\int_{\mathrm{M}}\varphi\big(\Delta_{g_0}(\epsilon\varphi) + K_0\big)dv_0 - 3\int_{\mathrm{M}}\varphi V dv_0\right\}.\end{aligned}$$

Il n'y a alors plus qu'à intégrer cette égalité entre 0 et 1 :

$$\ln\frac{\det_\zeta e^{-2\varphi}\big(\Delta_{g_0}+V\big)}{\det_\zeta\Delta_{g_0}+V} = -\frac{1}{6\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}}|\nabla_0\varphi|^2dv_0 + \int_{\mathrm{M}}K_0\varphi dv_0 - 3\int_{\mathrm{M}}V\varphi dv_0\right\}.$$

□

Nous en déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.4 *Soit $(\mathcal{M}, g_0)$ une surface riemannienne compacte sans bord. Soit aussi ψ une fonction C^∞ sur $\mathcal{M}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et V_0 et V_1 deux potentiels positifs non nuls sur $\mathcal{M}$. Alors*

$$\ln \frac{\det_\zeta e^{-2\psi}\big(\Delta_{g_0} + V_1\big)}{\det_\zeta e^{-2\psi}\big(\Delta_{g_0} + V_0\big)} = \ln \frac{\det_\zeta \big(\Delta_{g_0} + V_1\big)}{\det_\zeta \big(\Delta_{g_0} + V_0\big)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{M}} \psi (V_1 - V_0) dv_0,$$

où dv_0 la mesure volume associée à g_0.

Démonstration : Soit g la métrique riemannienne sur $\mathcal{M}$ définie par $g = e^{2\psi} g_0$. Alors $\Delta_g = e^{-2\psi}\Delta_{g_0}$, et

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det_\zeta e^{-2\psi}\big(\Delta_{g_0} + V_1\big)}{\det_\zeta e^{-2\psi}\big(\Delta_{g_0} + V_0\big)} &= \ln \frac{\det_\zeta \big(\Delta_{g_0} + V_1\big)}{\det_\zeta \big(\Delta_{g_0} + V_0\big)} + \ln \frac{\det_\zeta e^{-2\psi}\big(\Delta_{g_0} + V_1\big)}{\det_\zeta \big(\Delta_{g_0} + V_1\big)} \\ &- \ln \frac{\det_\zeta e^{-2\psi}\big(\Delta_{g_0} + V_0\big)}{\det_\zeta \big(\Delta_{g_0} + V_0\big)}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

La proposition 1.4.3 appliquée respectivement aux deux derniers termes du membre de droite donne l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det_\zeta e^{-2\psi}\big(\Delta_{g_0} + V_1\big)}{\det_\zeta \big(\Delta_{g_0} + V_1\big)} &- \ln \frac{\det_\zeta e^{-2\psi}\big(\Delta_{g_0} + V_0\big)}{\det_\zeta \big(\Delta_{g_0} + V_0\big)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{M}} \psi \big(V_1 - V_0\big) dv_{g_0}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Le corollaire 1.4.4 se déduit de (1.24) et (1.25).

1.4.2 Une inégalité

L'objectif de cette section est la démonstration du théorème 0.0.6 qui caractérise les maxima, lorsque le potentiel varie, du déterminant $\zeta-$régularisé d'opérateurs de Schrödinger $\Delta_g + V$, pour certaines variétés riemanniennes $(\mathcal{M}, g)$.

Proposition 1.4.5 *Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété riemannienne compacte dont le groupe d'isométries agit de manière transitive sur $\mathcal{M}$ et v_0 une constante stritement positive. Alors si $m(V) := \frac{1}{Vol_g(\mathrm{M})} \int_{\mathrm{M}} V dv_g$,*

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \zeta_{\Delta_g + v_0 + tV}(s) = -s m(V) \zeta_{\Delta_g + v_0}(s+1).$$

Démonstration : D'après le théorème 1.3.3, si (φ_n, λ_n) est une résolution spectrale de Δ_g,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{|t=0} \zeta_{\Delta_g + v_0 + tV}(s) &= -s \mathrm{Trace}\Big(\mathcal{V} \circ (\Delta_g + v_0)^{-s-1}\Big) = -s \sum_{n \geq 0} \frac{(V\varphi_n, \varphi_n)}{(\lambda_n + v_0)^{s+1}} \\ &= -\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^s \int_{\mathrm{M}} V(x) \sum_{n \geq 0} e^{-(\lambda_n + v_0)t} \varphi_n^2(x) dv_g(x) dt. \end{aligned}$$

Dans le cas des tores plats $\mathbb{R}^m/\Lambda$, si l'on fait agir le laplacien sur l'ensemble des fonctions à valeurs complexes (ce qui ne change fondamentalement rien à notre problème), les fonctions propres sont les exponentielles complexes, et donc, pour tout entier n,

$$(V\varphi_n, \varphi_n) = \int_{\mathrm{M}} V\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}dv_g(x) = m(V),$$

ce qui donne le résultat.
Dans le cadre plus général de la proposition 1.4.5, la démonstration suivante fait suite à une communication orale de G. Carron :
Si $\Phi : (\mathcal{M}, g) \to (\mathcal{M}, g)$ est une isométrie et $K(t, x, y)dvg(x)$ est le noyau au sens de Schwartz de l'opérateur de la chaleur de Δ_g, $K(t, x, y) = K(t, \Phi(x), \Phi(y))$.
Le groupe d'isométries de $(\mathcal{M}, g)$ agissant transitivement, la fonction

$$x \in \mathcal{M} \mapsto K(t, x, x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda_n t}\varphi_n^2(x)$$

est indépendante de x, et donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{M}} V(x)\sum_{n\geq 0} e^{-(\lambda_n+v_0)t}\varphi_n^2(x)dv_g(x) &= m(V)\sum_{n\geq 0} e^{-(\lambda_n+v_0)t} \\ &= m(V)\mathrm{Trace}(e^{-t(\Delta_g+v_0)}). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}\zeta_{\Delta_g+v_0+tV}(s) = -m(V)s\zeta_{\Delta_g+v_0}(s+1).$$

Demonstration du théorème 0.0.6 : Supposons pour commencer que $(\mathcal{M}, g)$ soit une variété riemannienne compacte sans bord telle que le groupe d'isométries de g agisse de manière transitive sur $\mathcal{M}$. Soit V un potentiel positif non constant et v_0 une constante strictement positive. Posons

$$A_t := \Delta_g + v_0 + t(V - v_0),$$

où v_0 est défini dans le théorème. Pour tout réel t dans un voisinage de $[0, 1]$, le potentiel $v_0 + t(V - v_0)$ est positif, non nul et $V - v_0$ est lui aussi non nul. Le corollaire 1.4.2 nous assure donc du fait que la fonction

$$t \in [0, 1] \mapsto f(t) = \ln\det{}_\zeta A_t$$

est strictement concave. De plus, d'après la proposition 1.4.5,

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}\zeta_{A_t}(s) = -s\Big(\int_{\mathrm{M}}(V(x) - v_0)\frac{dv_g(x)}{\mathrm{Vol}_g(\mathcal{M})}\Big)\zeta_{A_0}(s+1) = 0,$$

pour tout s dans $\mathbb{C}$. En particulier,

$$f'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \ln \det{}_\zeta A_t = \frac{d}{dt}_{|t=0} \frac{d}{ds}_{|s=0} \zeta_{A_t} = 0. \tag{1.26}$$

f est une fonction strictement concave sur I dont la dérivée s'annule en 0. Par conséquent, $f(0) > f(1)$; ce qui est équivalent à

$$\det{}_\zeta(\Delta_g + V) < \det{}_\zeta(\Delta_g + v_0).$$

Nous avons donc démontré les cas 1. et 3. du théorème, ainsi que le cas 2. lorsque la courbure de g est constante. Ces métriques ont en effet toutes un groupe d'isométrie transitif.

Soit maintenant $\mathcal{M} = S^2$ ou $S^1 \times S^1$. D'après le théorème d'uniformisation, il existe une unique fonction φ C^∞ sur $\mathcal{M}$ telle que $g_0 = e^{2\varphi} g$ ait une courbure constante et même volume que g. Alors $\Delta_{g_0} = e^{-2\varphi}\Delta_g$. Ainsi,

$$\ln \frac{\det_\zeta\big(\Delta_g + V\big)}{\det_\zeta\big(\Delta_g + v_0 e^{2\varphi}\big)} \quad = \quad \ln \frac{\det_\zeta e^{2\varphi}\big(\Delta_{g_0} + Ve^{-2\varphi}\big)}{\det_\zeta e^{2\varphi}\big(\Delta_{g_0} + v_0\big)}.$$

Appliquons le corollaire 1.4.4 au membre de droite en posant $\psi = \varphi, V_1 = Ve^{-2\varphi}$ et $V_0 = v_0$:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det_\zeta\big(\Delta_g + V\big)}{\det_\zeta\big(\Delta_g + v_0 e^{2\varphi}\big)} \quad &= \quad \ln \frac{\det_\zeta\big(\Delta_{g_0} + Ve^{-2\varphi}\big)}{\det_\zeta\big(\Delta_{g_0} + v_0\big)} \\ &- \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{M}} \varphi\big(Ve^{-2\varphi} - v_0\big) dv_0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Or, g_0 a un groupe d'isométries transitif, et $\int_{\mathrm{M}} v_0 dv_{g_0} = \int_{\mathrm{M}} Ve^{-2\varphi} dv_{g_0}$. La première partie de la démonstration du théorème 0.0.6 implique donc que

$$\frac{\det_\zeta\big(\Delta_{g_0} + Ve^{-2\varphi}\big)}{\det_\zeta\big(\Delta_{g_0} + v_0\big)} \leq 1, \tag{1.28}$$

avec égalité si et seulement si $e^{-2\varphi}V$ est un potentiel constant. En combinant (1.27) et (1.28), nous obtenons

$$\ln \frac{\det_\zeta\big(\Delta_g + V\big)}{\det_\zeta\big(\Delta_g + v_0 e^{2\varphi}\big)} \leq -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{M}} \varphi\big(V - v_0 e^{2\varphi}\big) dv_g,$$

le cas d'égalité étant réalisé si et seulement si $Ve^{-2\varphi}$ est constant. C'est exactement le 2. du théorème 0.0.6.

Chapitre 2

Discrétisation

Soit $(\mathcal{M}, g)$ une surface riemannienne compacte. A tout potentiel V de classe C^∞ sur $\mathcal{M}$, positif et non nul, est associé un opérateur de Schrödinger défini par

$$Af : x \in \mathcal{M} \mapsto \Delta_g f(x) + V(x)f(x)$$

pour toute fonction f C^∞ sur $\mathcal{M}$.

C'est l'opérateur formellement symétrique associé à la forme quadratique définie par

$$q : f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathrm{M}} \Big\{ g_x^\sharp \Big(df(x), df(x) \Big) + V(x) f^2(x) \Big\} \, dv_g(x),$$

où $g^\sharp$ est le produit Hilbertien induit par dualité sur les $1-$formes.

A est un opérateur à domaine sur L^2, essentiellement auto-adjoint. Pour tout réel s, il se prolonge de manière unique en un opérateur continu

$$A : H^s(\mathcal{M}) \mapsto H^{s-2}(\mathcal{M})$$

où les H^s sont les espaces de Sobolev sur $\mathcal{M}$.

La résolvante $(A-z)^{-1}$ est compacte sur L^2, et A possède un spectre $\sigma(A) := \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...\}$, où les λ_i sont répétées autant de fois que l'exige leur multiplicité. A chaque valeur propre, on peut associer des vecteurs propres φ_i (non canoniques) de norme 1, C^∞ sur la variété. La positivité de V implique $\lambda_1 > 0$, et par conséquent l'injectivité de A. A possède donc un déterminant $\zeta-$régularisé

$$\det_\zeta(A) := e^{-\tilde{\zeta}'(0)}$$

où $\tilde{\zeta}$ est l'extension méromorphe sur $\mathbb{C}$ de

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n^s}$$

A certaines suite de triangulations G_n (que nous appellerons admissibles) de $(\mathcal{M}, g)$, il est possible d'associer par une méthode des éléments finis des suites d'opérateurs de Schrödinger discrets A_n, définis sur les graphes associés à ces triangulations, qui approchent dans un sens que nous préciserons l'opérateur $A := \Delta_g + V$. Les opérateurs A_n sont des endomorphismes linéaires symétriques sur des espaces euclidiens, et possèdent donc un déterminant. La question est de savoir si cette suite de déterminants, après normalisation, approche le déterminant de A. Nous prouvons ici que c'est le cas pour les tores de dimension 2 si l'on normalise par les déterminants discrétisés d'un autre opérateur de Schrödinger.

Soit $\mathcal{M} = S^1 \times S^1$, g une métrique riemannienne sur $\mathcal{M}$ et V_0 et $V_1 \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}^+)$ deux potentiels non nuls , A_0 et A_1 les opérateurs de Schrödinger associés et $(A_{0,n})_{n\geq 3}$, $(A_{1,n})_{n\geq 3}$ leurs suites d'opérateurs discrétisés sur les triangulations G_n. Nous démontrons le théorème 0.0.3.

Le schéma de preuve est le suivant. Nous utiliserons les formules variationnelles du déterminant des opérateurs de Schrödinger obtenus dans la partie 1. Posons pour tout t dans $[0, 1]$

$$A_t := \Delta_g + V_0 + tV,$$

où $V := V_1 - V_0$, et nous définissons, pour chaque t, $(A_{t,n})_{n\geq 3}$ la suite des discrétisés de A_t. Soient f_n et f les fonctions C^∞ définies sur un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $[0, 1]$ par

$$f_n(t) := \ln \det A_{t,n} \text{ et } f(t) := \ln \det{}_\zeta A_t.$$

Dans le cas où la courbure de g est nulle, le théorème 0.0.3 est une conséquence de la convergence uniforme de f'_n vers f' sur $[0, 1]$, qui sera obtenue comme conséquence des deux propriétés suivantes

- $\sup_{[0,1]} |f''_n - f''| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,
- $f'_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(0)$.

Pour une métrique g quelconque sur $\mathcal{M}$, nous nous ramènerons au cas précédent grâce d'une part au théorème d'uniformisation des surfaces et d'autre part au corollaire 1.4.4.

Dans 2.1, nous introduirons les opérateurs différentiels sur les graphes finis. La partie 2.2 se fixe pour objectif de démontrer la convergence uniforme de la suite des dérivées secondes du logarithme du déterminant, sous certaines conditions sur la suite de triangulations. Dans la partie 2.3, nous démontrons la convergence de $(f'_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f'(0)$ dans le cas où $V_0 = v$ est un potentiel constant (ce qui ne restreint pas les hypothèses du théorème), et où la courbure de g est nulle. Enfin, le partie 2.4 achèvera la démonstration du théorème 0.0.3 dans le cas général.

2.1 Laplaciens subordonnés à un graphe

Soit $G = (S, E)$ un graphe fini, non orienté, sans boucles, ni arêtes multiples, où S est l'ensemble des sommets de G, et E l'ensemble des arêtes. Posons $\alpha = \sharp S$, et $m = \sharp E$. Nous noterons, pour deux sommets v, w, $v \sim w$ lorsque v et w seront voisins.
On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^S$ muni du produit scalaire canonique que nous noterons toujours par la suite $(.|.)$, afin de le différencier du produit Hilbertien sur $L^2(\mathcal{M})$ noté $(.,.)$. On désigne par O_G l'ensemble des opérateurs symétriques réels A sur $\mathbb{R}^S$, de matrices $A = (a_{ij})$ tels que

$$\begin{aligned} a_{ij} &< 0, \text{ si } (i,j) \in E; \\ &= 0 \text{ si } (i,j) \notin E \text{ et } i \neq j. \end{aligned} \tag{2.1}$$

O_G est un cône de dimension $m + \alpha$. Les éléments de O_G seront appelés opérateurs de Schrödinger sur G.
Les opérateurs de Schrödinger dont le noyau contient les vecteurs constants seront appelés laplaciens, et notés Δ. Leurs éléments diagonaux vérifient

$$a_{ii} = -\sum_{i \sim j} a_{ij} > 0. \tag{2.2}$$

La donnée d'un laplacien est donc équivalente à l'affectation d'un poids strictement positif $c_{ij} = -a_{ij}$ à chaque arête $\{ij\}$. Un tel poids est parfois appelé métrique sur le graphe G. Si la métrique est constante et égale à 1, le laplacien est dit canonique.

A toute matrice symétrique $A \in O_G$ est associée une forme quadratique

$$q_A : x \in \mathbb{R}^S \mapsto (Ax|x).$$

Elle s'écrit de manière unique sous la forme

$$q_A(x) = \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 + \sum_{i \in V} W_i x_i^2$$

où

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= -a_{i,j} > 0, et \\ W_i &= a_{ii} - \sum_{j \sim i} a_{i,j} \end{aligned}$$

est le potentiel de A. Un opérateur de Schrödinger A est un laplacien si et seulement si son potentiel est nul. Nous ne prendrons dans la suite que des potentiels positifs.
Si $A = \Delta$ est un laplacien, la forme quadratique s'écrit donc

$$q_\Delta(x) = \sum_{(i,j)\in E} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 \tag{2.3}$$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^S$, la matrice de la forme quadratique q_Δ s'identifie à la matrice de l'opérateur Δ défini ainsi : soit f dans $\mathbb{R}^S$, et v un élément de V,

$$\Delta f(v) = \sum_{w\sim v} c_{vw}\big(f(v) - f(w)\big).$$

A plusieurs points de vue, de tels opérateurs ont des propriétés qui en font des analogues discrets adéquats aux laplaciens sur les variétés :

- Ce sont des opérateurs locaux : dans la formulation (2.3), la valeur de l'image de f au point v ne fait intervenir que les valeurs de f sur les sommets voisins de v.
- Grâce à la condition d'ellipticité discrète $c_{vw} > 0$, ces opérateurs vérifient un principe du maximum : si f est harmonique en v, alors $f(v)$ est une moyenne pondérée des $\{f(w)/w \sim v\}$:

$$f(v) = \frac{\sum_{w\sim v} c_{vw} f(w)}{\sum_{w\sim v} c_{vw}}$$

- Les différentes méthodes des éléments finis font apparaître de tels opérateurs. En dimension 1, si $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est C^4, que $G_{n+1} = (S_{n+1}, E_{n+1})$ est le graphe linéaire à $n+1$ sommets, plongé dans $[0,1]$ de la manière la plus naturelle, à savoir :

$$S_{n+1} := \left\{\frac{i}{n}/i \in [0,n]\right\} \text{ et } c_{\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}} = n^2,$$

alors

$$\Delta_n f\left(\frac{i}{n}\right) = n^2\left(2f\Big(\frac{i}{n}\Big) - f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\right).$$

Ainsi

$$\Delta_n f(\frac{i}{n}) = -f''(\frac{i}{n}) + O(\frac{1}{n^2}).$$

En dimension 2, il existe rarement des discrétisations si parfaites et si évidentes de surfaces riemanniennes $(\mathcal{M}, g)$. Les discrétisations sont des triangulations qui doivent vérifier un certain nombre de conditions pour que les opérateurs qu'elles induisent d'une part vérifient la condition d'ellipticité, et d'autre part convergent vers le laplacien Δ_g. Il existe une grande littérature qui traite ces questions (voir par exemple [Ci] ou [Cdv-Ma]).

Fixons $(.|.)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^S$. On peut associer à q_A un opérateur symétrique A sur $\mathbb{R}^S$, tel que $q_A(.) = (A.|.)$. A est diagonalisable et son spectre vérifie

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_\alpha\} \subset \mathbb{R}^+.$$

L'inégalité $\lambda_1 < \lambda_2$ est le théorème de Perron-Frobenius , analogue discret du théorème de Courant. Il traduit le fait que la première valeur propre d'un opérateur de Schrödinger est de multiplicité 1 (voir [Cdv2]). Si A est un laplacien, $\lambda_1 = 0$ et $\ker A = \mathbb{R}.1$. Si au lieu de $(.|.)$, on choisit un produit scalaire tel que la base canonique $\{\delta_v / v \in V\}$ est orthogonale $\big((\delta_v|\delta_v) = b_v > 0\big)$, tout ce qui précède s'adapte aisément, en vertu du fait que l'on passe d'une structure euclidienne à l'autre par l'isométrie

$$\varphi : \sum_v x_v \delta_v \mapsto \sum_v \frac{x_v}{\sqrt{b_v}} \delta_v.$$

Nous nous intéressons dorénavant aux déterminants de tels opérateurs. Si A n'est pas un laplacien,

$$\det A = \prod_{1 \leq i \leq \alpha} \lambda_i$$

Sinon, nous enlèverons évidemment la première valeur propre

$$\det{}' \Delta = \prod_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i$$

Dans la littérature, cette quantité est parfois appelée complexité du graphe.

Le plus ancien résultat concernant cet invariant spectral est dû à Kirchoff. Il le relie aux arbres maximaux de G. Rappelons qu'un arbre de G est un sous-graphe de G simplement connexe, i.e. qui ne contient aucun cycle. Un arbre de G est maximal si aucun arbre ne le contient strictement, i.e. s'il contient exactement tous les sommets.

Théorème 2.1.1 (Kirchoff) *[Ch]*

$$\det{}' \Delta = \alpha \sum_{T \in \mathcal{V}(G)} W(T)$$

où $\mathcal{V}(G)$ est l'ensemble des arbres maximaux de G et $W(T)$, le poids de T, est le produit des c_{vw} sur toutes les arêtes $\{vw\}$ contenues dans T.

Remarquons que si l'on change la métrique, les arbres ne changent pas, seuls leurs poids varient. Cette formule est très pratique pour calculer certains déterminants. Dans le cas où Δ est le laplacien canonique sur le graphe circulaire à n sommets, ce théorème donne une démonstration de l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = n.$$

Cette formule a ensuite été étendue : F.Chung [Ch] l'a écrite dans le cas où G est un graphe à bord et R. Forman [Fo3] a explicité chacun des termes du polynôme caractéristique de Δ.

Le déterminant du laplacien intervient dans un autre modèle de mécanique statistique [Ke] : celui des dimères en dimension 2. Temperley [Te] a en effet montré que le nombre de recouvrement par des dimères de certains sous-graphes de $\mathbb{Z}^2$ peut être calculé avec le déterminant du laplacien défini sur des graphes reliés à ceux-ci.

2.2 La méthode des éléments finis

$\mathcal{M}$ sera de dimension 2. Nous montrons que pour une suite de triangulations qui vérifie un certain nombre de propriétés, les opérateurs de Schrödinger discrets obtenus par une méthode des éléments finis donnent de bonnes approximations spectrales des opérateurs de Schrödinger définis sur la variété ; c'est-à-dire que les spectres, les sous-espaces propres et les résolvantes discrets convergent, dans un sens propre à chacune de ces quantités, vers leurs analogues continus.

A part pour le spectre, nous ne montrerons que des convergences simples en t de ces quantités, notamment des dérivées secondes. Le théorème de Montel et une borne sur ces dérivées secondes nous permettra d'en conclure que la convergence est uniforme.

Il est à noter que pour montrer la convergence uniforme en dimension 1, R.Forman s'appuie sur l'égalité entre le déterminant usuel d'un opérateur différentiel sur un graphe linéaire et son déterminant de Feynman : la convergence uniforme en fonction d'une borne L_∞ sur le potentiel est obtenue comme conséquence de la convergence uniforme des approximations d'Euler d'une équation différentielle ordinaire elliptique. Il prouve ensuite la convergence simple

$$\frac{d}{dt}\ln\det A_{t,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{d}{dt}\ln\det{}_\zeta A_t.$$

2.2.1 Suites admissibles

Nous définissons ce que nous appellerons une suite de triangulations de $(\mathcal{M}, g)$, admissible pour une méthode des éléments finis. Il s'agit en fait de préciser quelles conditions sont suffisantes pour s'assurer de la convergence du spectre et des sous-espaces propres.

Définition 2.2.1 *Soit, pour tout entier n suffisamment grand,*

1. $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de graphes finis de sommets S_n et d'arêtes E_n,*
2. $j_n : G_n \hookrightarrow \mathcal{M}$ *une suite de plongements tels que $j_n(G_n)$ soit une triangulation géodésique de $\mathcal{M}$, dont les aires et les diamètres des $2-$cellules tendent vers 0,*
3. $W_n : \mathbb{R}^{S_n} \hookrightarrow H^1(\mathcal{M})$ *un morphisme injectif d'espaces vectoriels tel que*
$$q_n : f \in \mathbb{R}^{S_n} \mapsto \int_{\mathrm{M}} \|\nabla W_n(f)\|_x^2 dv_g(x)$$
soit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^{S_n}$ associée à un laplacien Δ_n, au sens où nous l'avons défini dans (2.1) et (2.2), tels que les coefficients de la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^{\alpha_n}$ soient bornés par une constante indépendante de n.
4. $(.|.)$ *un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{S_n}$ qui s'écrit pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{S_n}$,*
$$(f|f) = \sum_{i=1}^{\alpha_n} a_{i,n} f^2(i).$$
Nous supposerons de plus qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout entier n et tout i compris entre 1 et α_n, on ait
$$\frac{C_0^{-1}}{\alpha_n} \leq a_{i,n} \leq \frac{C_0}{\alpha_n} \quad et \tag{2.4}$$
$$(f|f) \leq C \int_{\mathrm{M}} W_n(f)^2. \tag{2.5}$$
5. *Il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que pour toute fonction f de $\mathbb{R}^{S_n}$,*
$$\left| \sqrt{(f|f)} - \sqrt{\int_{\mathrm{M}} W_n(f)^2} \right| \leq c_n \sqrt{q_n(f)}. \tag{2.6}$$

$(G_n, j_n, (.|.), q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sera dite admissible pour la méthode des éléments finis sur $(\mathcal{M}, g)$ si elle vérifie la propriété suivante :*
Pour toutes constantes K et ϵ positives, il existe un entier $n_1 = n_1(K, \epsilon)$ tel que pour toute fonction f continue sur $\mathcal{M}$, de norme L^2 égale à 1, et C^2 en restriction à chaque $2-$cellule $T_{i,n}$ de la triangulation, on ait les estimations suivantes dès que $\|f\|_{2,\infty} \leq K$ et $n \geq n_1$,
$$\Big| \int_{\mathrm{M}} f^2(x) dv_g(x) - (p_n(f)|p_n(f)) \Big| \leq \epsilon, \tag{2.7}$$
$$\int_{\mathrm{M}} \Big\| \nabla \Big(f - W_n \circ p_n(f) \Big) \Big\| dv_g \leq \epsilon, \tag{2.8}$$

où $p_n : C^2(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}^{S_n}$ est l'application restriction aux sommets de G_n, et où le gradient et sa norme dans l'inégalité (2.8) sont calculés avec la métrique g.

Cette définition appelle quelques remarques.

- En ce qui concerne le produit scalaire, pratiquement, les $a_{i,n}$ sont les aires de domaine entourant chaque sommet de la triangulation G_n, et formant une partition de la surface, comme par exemple des domaines de Voronoi. Puisque $\sum_{i=1}^{\alpha_n} a_{i,n} = Vol_g(\mathcal{M})$, l'hypothèse (2.4) signifie alors simplement que l'on impose à ces aires de converger vers 0 à la même vitesse. L'intérêt d'un tel produit scalaire est d'obtenir l'orthogonalité de la base $\left(\delta_v\right)_{v \in S_n}$, ce qui simplifie les calculs. Si l'on choisit des domaines de Voronoi, l'inégalité (2.6) est alors valable en prenant pour c_n le maximum des diamètres des $2-$cellules de la triangulation (la démonstration est identique à celle que nous ferons dans le cas des tores plats).
- Il existe plusieurs méthodes pour générer de telles suites de triangulations. Dodziuk [Dod] en propose une en dimension m quelconque, obtenue par subdivision d'une triangulation C^∞ initiale K. La méthode consiste à se ramener à des simplexes de $\mathbb{R}^m$ via un système de cartes dépendant de K. En dimension 2, il est possible à partir d'une triangulation géodésique de choisir pour W_n le morphisme d'espaces vectoriels qui consiste à étendre $f \in \mathbb{R}^{S_n}$ de manière affine sur chaque géodésique puis harmoniquement à l'intérieur de chaque cellule. La forme quadratique discrète obtenue est alors un laplacien si tous les angles de la triangulation sont aigus. L'estimée de l'erreur sur les gradients ainsi que la borne uniforme sur les coefficients de la matrice de Δ_n sont quant à elles valables si tous les angles des triangulations sont compris dans un intervalle du type $[\beta, \frac{\pi}{2} - \beta]$, β ne dépendant pas de n. Y. Colin de Verdière et A. Marin [Cdv-Ma] ont prouvé que de telles suites de triangulations existent sur toute surface riemannienne compacte.
- Si f est une fonction propre du laplacien discret Δ_n associée à $\lambda_k(\Delta_n)$, l'inégalité (2.6) permet de prouver que $(f|f)$ est $\varepsilon-$proche de $\int_{\mathrm{M}} W_n(f)^2$, à partir d'un rang qui ne dépend que de k. L'idée d'introduire cette inégalité est due à une communication orale de E. Aubry.

Dans tout ce chapitre, nous supposerons que $(\mathcal{M}, g)$ est une surface riemannienne compacte, et que nous nous sommes donné une suite admissible de triangulations. Nous poserons

$$\begin{aligned}
q_{t,n} \quad &: \quad f \in \mathbb{R}^{S_n} \mapsto q_n(f) + \Big(p_n(V_t)f\big|f\Big), \\
q_t \quad &: \quad f \in H^1(\mathcal{M}) \mapsto \int_{\mathrm{M}} \Big(\|\nabla f\|_x^2 + V_t f^2(x)\Big) dv_g(x).
\end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, nous obtenons la propriété suivante dont découleront les convergences des spectres et des sous-espaces propres discrets.

Proposition 2.2.2 *Soient deux réels K et ϵ strictement positifs. Il existe un entier n_0 dépendant de K et de ϵ tel que pour tout entier n plus grand que n_0, et toute fonction f de classe C^2 sur $\mathcal{M}$, de norme L^2 égale à 1 et de norme $\|f\|_{2,\infty} \leq K$,*

$$\sup_{t\in[0,1]} \left| q_t(f) - \frac{q_{t,n}(p_n(f))}{(p_n(f)|p_n(f))} \right| \leq \epsilon. \tag{2.9}$$

Dans le cas où $f \in W_n(\mathbb{R}^{S_n})$, le résultat subsiste en remplaçant l'hypothèse $\|f\|_{2,\infty} \leq K$ par l'inégalité plus faible $\int_{\mathrm{M}} \|\nabla f\|_0^2 \leq K$.

Démonstration : Décomposons le membre de gauche de l'inégalité (2.9) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
q_t(f) - \frac{q_{t,n}(p_n(f))}{(p_n(f)|p_n(f))} \quad &= \quad \frac{1}{(p_n(f)|p_n(f))}\Big[q_t(f)\Big((p_n(f)|p_n(f)) - 1\Big) \\
&+ \quad \int \|\nabla f\|^2 - q_n\big(p_n(f)\big) + \int V_t f^2 - \big(p_n(V_t f)\big|p_n(f)\big)\Big].
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Premier cas : f est une fonction de classe C^2 sur $\mathcal{M}$. D'après les hypothèses sur f et l'admissibilité de notre suite de triangulations, il existe un entier $n_0(K)$ tel que $q_t(f)$ est majoré par une fonction de K, indépendamment de t et $|(p_n(f)|p_n(f)) - 1| \leq \epsilon$ pour $n \geq n_0(K)$.

Posons $q(f) := \int_{\mathrm{M}} |\nabla f|^2 dv_g$. Alors,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathrm{M}} \|\nabla f\|^2 - q_n\big(p_n(f)\big)\right| \quad &= \quad \big|q(f) - q\big(W_n \circ p_n(f)\big)\big| \\
&= \quad \left[\Big(q(f)\Big)^{\frac{1}{2}} - \Big(q\big(W_n \circ p_n(f)\big)\Big)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\times \quad \left[\Big(q(f)\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(q\big(W_n \circ p_n(f)\big)\Big)^{\frac{1}{2}}\right].
\end{aligned}$$

$q(f)$ et $q\big(W_n \circ p_n(f)\big)$ sont deux quantités majorées par une fonction de K. De plus,

$$\Big(q(f)\Big)^{\frac{1}{2}} - \Big(q\big(W_n \circ p_n(f)\big)\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(q\big(f - W_n \circ p_n(f)\big)\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon,$$

pour $n \geq n_0(K)$ puisque la suite de triangulations est admissible.

Pour majorer $q_t(f) - \frac{q_{t,n}(p_n(f))}{(p_n(f)|p_n(f))}$ par une fonction de ϵ qui tend vers 0 en 0, il reste à voir, d'après (2.10), que

$$\left| \int V_t f^2 - (p_n(V_t f)|p_n(f)) \right| \leq \epsilon. \tag{2.11}$$

Or, $\|V_t f\|_{2,\infty}$ est bornée par une quantité ne dépendant que de K. (2.11) est donc une conséquence du résultat

Lemme 2.2.3 – *Si f et g sont deux fonctions de classe C^2 sur $\mathcal{M}$, de normes L^2 égales à 1, telles que $\|f\|_{2,\infty}$ et $\|g\|_{2,\infty} \leq K$, alors*

$$\left| \int fg - \big(p_n(f)|p_n(g)\big) \right| \leq \epsilon \text{ pour } n \geq n_0(K).$$

– *Si f et g sont deux fonctions de $W_n(\mathbb{R}^{S_n})$,de norme L^2 égale à 1, telles que $\int_{\mathrm{M}} |\nabla f|^2$ et $\int_{\mathrm{M}} |\nabla g|^2$ sont inférieures à K, alors l'inégalité précédente subsiste.*

Ce lemme est une conséquence immédiate de l'admissibilité de la suite et de

$$\begin{aligned} 2\int fg - 2\big(p_n(f)|p_n(g)\big) &= \int (f+g)^2 - \big(p_n(f+g)|p_n(f+g)\big) \\ &- \Big[\int f^2 - \big(p_n(f)|p_n(f)\big)\Big] - \Big[\int g^2 - \big(p_n(g)|p_n(g)\big)\Big]. \end{aligned}$$

□

Deuxième cas : $f = W_n \circ p_n(f) \in W_n(\mathbb{R}^{S_n})$. Alors par définition de q_n,

$$\int_{\mathrm{M}} \|\nabla f\|^2 - q_n(p_n(f)) = 0.$$

Nous utilisons la condition (2.6) de l'admissibilité :

$$\left| \sqrt{(f|f)} - \sqrt{\int_{\mathrm{M}} W_n(f)^2} \right| \leq c_n \sqrt{q_n(f)},$$

pour voir que $|(p_n(f)|p_n(f)) - 1| \leq \epsilon$ pour $n \geq n_0(K,\epsilon)$. La suite de la démonstration est alors identique au cas précédent. □

2.2.2 Quelques lemmes utiles

Fixons définitivement les notations suivantes :

– $A_{t,n} : \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^{S_n}$ est l'opérateur symétrique défini par $q_{t,n}(.) = (A_{t,n}(.)|.)$. Son spectre sera noté

$$\sigma(A_{t,n}) = \{\lambda_{1,t,n} < \lambda_{2,t,n} \leq ... \leq \lambda_{\alpha_n,t,n}\}$$

et $(\varphi_{k,t,n})_{1 \leq k \leq \alpha_n}$ sera une base (non canonique) de fonctions propres.

– De même, nous noterons $\sigma(A_t) = (\lambda_{k,t})_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\varphi_{k,t})_{k\in\mathbb{N}^*}$ une base de fonctions propres de A_t.

Nous nous servirons beaucoup par la suite du principe du min-max :

Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert $\big(H,(.,.)\big)$. Supposons qu'il existe une base Hilbertienne de H de vecteurs propres de A, que le spectre de A soit réel, minoré, et que chaque valeur propre soit de dimension finie. Si nous rangeons le spectre par ordre croissant $\big(\lambda_k\big)_{k\geq 1}$, l'égalité suivante est alors valable pour tout k supérieur à 1 :

$$\lambda_k = \min_{\dim F=k} \max_{x\in F} \frac{\big(Ax,x\big)}{(x,x)}.$$

Lemme 2.2.4 *Il existe deux constantes C_1 et C_2 positives non nulles telles que, pour tout réel t dans $[0,1]$ et tout entier n supérieur à 3,*

1. $C_1k \leq \lambda_{k,t} \leq C_2k, \forall k \in \mathbb{N}^*$
2. $C_1k \leq \lambda_{k,t,n}, \forall k \in \mathbb{N}^*$

Démonstration :

1. Puisque les potentiels V_t sont positifs,

$$\int \Delta_g(\varphi)\varphi \leq \int A_t(\varphi)\varphi \leq \int \Delta_g(\varphi)\varphi + \alpha\|\varphi\|_0^2$$

où $\alpha = \sup_{t\in[0,1]} \|V_t\|_\infty$. Ainsi, pour tout entier k supérieur à 1 et tout réel t, d'après le principe du min-max,

$$\lambda_k(\Delta_g) \leq \lambda_{k,t} \leq \lambda_k(\Delta_g) + \alpha.$$

L'équivalent

$$\lambda_k(\Delta_g) \sim \frac{2\pi}{Vol_g(\mathcal{M})}k$$

et le fait que $\inf_{t\in[0,1]} \lambda_1(A_t) > 0$ impliquent alors la première assertion.

2. Puisque $|\lambda_{k,t,n} - \lambda_k(\Delta_n)| \leq \|V\|_\infty$, il suffit de montrer l'inégalité $\lambda_k(\Delta_n) \geq C_1k$. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H et q une forme quadratique sur H, alors les valeurs propres de $q_{|H}$ sont inférieures ou égales à celles de $q_{|F}$. En appliquant ce résultat à $H = H^1(\mathcal{M}), F = W_n(\mathbb{R}^{S_n})$, et $q = q_n$, nous avons pour tout k,

$$\lambda_k(\Delta_g) \quad \leq \quad \inf_{K\subset\mathbb{R}^{S_n},\dim K=k} \sup_{f\in H} \frac{q_n(f)}{\int (W_n(f))^2}.$$

Rappelons que la suite de triangulations étant admissible, l'inégalité (2.6) s'écrit aussi

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in\mathbb{R}^{S_n}\setminus\{0\}} \frac{(f|f)}{\int_{\mathrm{M}} W_n(f)^2} > 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda_k(\Delta_g) &\leq C \inf_{K\subset \mathbb{R}^{S_n}, \dim K = k} \sup_{f\in H} \frac{q_n(f)}{\left(f\middle|f\right)} \\ &\leq C\lambda_k(\Delta_n), \end{aligned}$$

où $\lambda_k(\Delta_n) = +\infty$ si $k > \alpha_n = \sharp S_n$. Donc $\lambda_{k,t,n} \geq \frac{C_1 k}{C}$.

Remarque : La deuxième inégalité est importante pour la raison suivante : la méthode des éléments finis, comme nous allons le voir, donne de bonnes approximations des premières valeurs propres. Pour le déterminant du laplacien, qui prend en compte l'ensemble du spectre, et a fortiori les plus grandes puisqu'on les multiplie entre elles, il semble raisonnable de s'assurer d'un contrôle des plus grandes valeurs propres. C'est l'unique raison de la présence de l'inégalité (2.5) : imposer une croissance suffisamment rapide des valeurs propres discrètes. Nous n'avons pas réussi à voir s'il était nécessaire de l'imposer comme condition dans la définition de l'admissibilité, ou si elle découle des autres hypothèses.

Nous aurons besoin du résultat suivant sur la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés compactes (voir par exemple [Sh]) :

Proposition 2.2.5 *Soit $A : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $p > 0$ sur une variété compacte $\mathcal{M}$.*

- *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, A s'étend par uniforme continuité en un opérateur continu*

$$A_s : H^s(\mathcal{M}) \to H^{s-p}(\mathcal{M})$$

- *Si de plus A est elliptique, l'opérateur $A_s \in \mathcal{L}(H^s(\mathcal{M}), H^{s-p}(\mathcal{M}))$ vérifie*
  1. *$Ker A_s \subset C^\infty(\mathcal{M})$, et $Ker A_s$ ne dépend pas de s,*
  2. **(Inégalité de Garding)** *Il existe $C = C_A > 0$ telle que pour tout $f \in H^p(\mathcal{M})$,*

$$\|f\|_p \leq C(\|f\|_0 + \|Af\|_0) \tag{2.12}$$

2.2.3 Convergences des quantités discrètes

Le spectre

Proposition 2.2.6 *Soit un entier k non nul et un réel ϵ strictement positif. Il existe un rang n_0 dépendant de k et de ϵ tel que pour tout n supérieur à n_0*

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\lambda_{k,t} - \lambda_{k,n,t}\right| \leq \epsilon.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant. Rappelons que $p_n : C^0(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}^{S_n}$ est l'application restriction aux sommets de S_n.

Lemme 2.2.7 *Fixons t dans $[0,1]$, k un entier naturel, et $\big(\varphi_{i,t}\big)_{1\leq i\leq k}$ une famille libre de vecteurs propres associés aux k premières valeurs propres de A_t. Si $G_{k,t}$ est l'espace vectoriel engendré par ces k vecteurs, il existe un entier n_0 dépendant de k tel que, pour tout n supérieur à n_0,*

$$\dim p_n\big(G_{k,t}\big) = \dim G_{k,t} = k.$$

Démonstration du lemme 2.2.7 : $A_t = \Delta_g + V_t$. Δ_g^2 est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 4 ; il existe donc d'après (2.12) une constante $C_g > 0$ telle que, pour toute fonction f dans $H^4(\mathcal{M})$,

$$\|f\|_4 \leq C_g\Big(\|f\|_0 + \|\Delta_g^2 f\|_0\Big).$$

De plus, sur une surface $\mathcal{M}$, l'espace de Banach $H^s(\mathcal{M})$ s'injecte compactement dans $C^p(\mathcal{M})$ dès que $s > p+1$. En particulier, $H^4(\mathcal{M})$ s'injecte continuement dans $C^2(\mathcal{M})$, et donc quitte à augmenter C_g, pour toute fonction f dans $C^2(\mathcal{M})$,

$$\|f\|_{2,\infty} \leq C_g\Big(\|f\|_0 + \|\Delta_g^2 f\|_0\Big). \tag{2.13}$$

Soit alors φ une fonction propre de A_t associée à une valeur propre λ inférieure à $\lambda_{k,t}$, de norme égale à 1 dans $L^2(\mathcal{M}, dv_g)$. Alors,

$$\Delta_g^2\varphi \;=\; \big(A_t - V_t\big)^2\varphi = A_t^2\varphi - \big(V_tA_t\varphi + A_t(V_t\varphi)\big) + V_t^2\varphi.$$

Or,

$$A_t\big(V_t\varphi\big) = (\Delta V_t)\varphi + V_t(A_t\varphi) + 2\big(\nabla V_t, \nabla\varphi\big).$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\Delta_g^2\varphi &= A_t^2\varphi - 2V_t(A_t\varphi) - \varphi\Delta V_t - 2\big(\nabla V_t, \nabla\varphi\big) + V_t^2\varphi \\ &= \lambda^2\varphi - 2\lambda V_t\varphi - \varphi(\Delta V_t) - 2\big(\nabla V_t, \nabla\varphi\big) + V_t^2\varphi. \end{aligned}\tag{2.14}$$

Soit α une borne indépendante de t sur $\|V_t\|_{2,\infty}$. D'après (2.14), $\|\Delta_g^2\varphi\|_0^2$ est donc bornée par une fonction ne dépendant que de α et λ. Or, $\lambda \leq \lambda_{k,t} \leq C_2 k$ d'après le lemme 2.2.4. Grâce à l'inégalité (2.13), $\|\varphi\|_{2,\infty}$ est donc bornée par une fonction de k, pour toute fonction propre φ d'un opérateur de la famille $\big(A_t\big)_{t\in[0,1]}$ associée à l'une de ses k premières valeurs propres. Il en est de même de tout f dans la boule unité de $G_{k,t}$ pour la norme $L^2(\mathcal{M}, dv_g)$.

D'où si $p_n : G_{k,t} \to \mathbb{R}^{S_n}$ n'est pas injective, il existe une fonction φ de norme L^2 égale à 1 dans $G_{k,t}$ telle que $p_n(\varphi) = 0$, c'est-à-dire φ est nulle en chaque sommet de G_n. Alors en tout point x de $\mathcal{M}$, nous avons

$$|\varphi(x)| \leq \text{diam }(T_{k,n})\|\nabla\varphi\|_\infty,$$

où $T_{k,n}$ est une 2-cellule de G_n qui contient x. Or

$$\epsilon_n := \sup_k \text{diam }(T_{k,n}) \to 0,$$

et

$$1 = \int_{\mathrm{M}} \varphi^2 = \sum_{T_k} \int_{T_k} \varphi^2(x)dx \leq (\epsilon_n M)^2.$$

Ces deux estimations ne sont pas compatibles.

$p_n : G_{k,t} \mapsto W_n(\mathbb{R}^{S_n})$ est donc injective pour n assez grand. □

Démonstration de proposition 2.2.6 :

Soit $t \in [0,1]$ et $\varphi_t \in G_{k,t}$ de norme 1. Dans la démonstration du lemme 2.2.7, nous avons prouvé l'existence d'une constante $C = C(k)$ indépendante de t telle que

$$\|\varphi_t\|_{2,\infty} \leq C.$$

Ceci va nous permettre d'appliquer la proposition 2.2.2. Soit un entier $n_0 = n_0(k,\epsilon)$ tel que pour n plus grand que n_0,

$$\left| \frac{q_{t,n}\big(p_n(\varphi_t)\big)}{\big(p_n(\varphi_t)|p_n(\varphi_t)\big)} - q_t\big(\varphi_t\big) \right| \leq \epsilon.$$

Alors, pour n supérieur à n_0,

$$\begin{aligned}
\lambda_{k,n,t} &= \inf_{H\subset\mathbb{R}^{S_n},\dim H=k} \sup_{f\in H} \frac{q_{t,n}(f)}{(f|f)} \\
&\leq \sup_{f\in p_n(G_{k,t})} \frac{q_{t,n}(f)}{(f|f)} = \sup_{\varphi_t\in G_{k,t}} \frac{q_{t,n}\big(p_n(\varphi_t)\big)}{\big(p_n(\varphi_t)|p_n(\varphi_t)\big)} \\
&\leq \sup_{\varphi_t\in G_{k,t}} \frac{q_t(\varphi_t)}{\|\varphi_t\|_0^2} + \epsilon \\
&\leq \lambda_{k,t} + \epsilon.
\end{aligned}$$

Pour l'autre inégalité, rappelons que les valeurs propres d'une forme quadratique sont supérieures à celles de sa restriction à un sous-espace vectoriel. Si on note $\mu_{k,t,n}$ les valeurs propres de $f \in \mathbb{R}^{S_n} \mapsto q_t(W_n(f))$ sur $\mathbb{R}^{S_n}$ muni du produit scalaire $f \mapsto \int W_n(f)^2$, on a $\lambda_{k,t} \leq \mu_{k,t,n}$. Mais

$$\begin{aligned}
\mu_{k,t,n} &= \inf_{H\subset\mathbb{R}^{S_n},\dim H=k} \sup_{f\in H} \frac{q_t(W_n(f))}{\int W_n(f)^2} \\
&\leq \sup_{f\in G_{k,n,t}} \frac{q_t(W_n(f))}{\int W_n(f)^2}.
\end{aligned}$$

où $G_{k,n,t} = \text{Vect}\ (\varphi_{1,n,t}, \ldots, \varphi_{k,n,t})$, les $\varphi_{i,n,t}$ étant des fonctions propres, normalisées pour le produit scalaire $(.|.)$, associées aux k premières valeurs propres de $A_{n,t}$. Or, d'après l'inégalité,

$$\lambda_{k,n,t} \leq \lambda_{k,t} + \epsilon \text{ pour } n \geq n_0$$

et $\lambda_{k,t} \leq C_2 k$ (voir le lemme 2.2.4), les énergies de Dirichlet de ces fonctions vérifient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{M}} \|\nabla W_n(\varphi_{i,n,t})\|_0^2 &= q_{t,n}(\varphi_{i,n,t}) - (V_t\varphi_{i,n,t}|\varphi_{i,n,t}) \\ &\leq \lambda_{i,n,t} + \|V_t\|_\infty \leq \big(C_2 k + \epsilon\big)\|V_t\|_\infty.\end{aligned}$$

Elles sont majorées par une fonction de k, indépendamment des valeurs de n et t. Nous pouvons donc appliquer ici aussi la proposition (2.2.2) : il existe $n_0 = n_0(k, \epsilon)$ tel que, pour toute fonction f dans $G_{k,n,t}$,

$$\frac{q_t(W_n(f))}{\int_{\mathrm{M}} W_n(f)^2} \leq \frac{q_{t,n}(f)}{(f|f)} + \epsilon,$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\lambda_{k,t} \leq \mu_{k,t,n} &\leq \sup_{f \in G_{k,n,t}} \frac{q_{t,n}(f)}{(f|f)} + \epsilon \\ &= \lambda_{k,t,n} + \epsilon.\end{aligned}$$

□

Nous regroupons dans un lemme deux estimations essentielles, portant sur des normes des fonctions propres, qui sont apparues au cours de la démonstration de la proposition 2.2.6, et qui seront très utiles par la suite :

Lemme 2.2.8 *Soit k un entier positif. Il existe un réel $K = K(k)$ tel que, pour tout entier n et tout réel t dans* $[0, 1]$*,*

1. *Pour toute fonction propre $\varphi \in L^2(\mathcal{M})$ de norme 1 de A_t, associée à l'une des k premières valeurs propres de cet opérateur,*

$$\|\varphi\|_{2,\infty}^2 \leq K,$$

2. *Pour toute fonction propre $\varphi \in \mathbb{R}^{S_n}$ de norme 1 de $A_{t,n}$, associée à l'une des k premières valeurs propres de cet opérateur,*

$$\int_{\mathrm{M}} \|\nabla W_n(\varphi)\|^2 \, dv_g \leq K.$$

Les fonctions propres

Dans cette section, nous ne prouverons qu'une convergence simple des fonctions propres discrètes vers les fonctions propres continues. Nous fixons donc t dans $[0,1]$, et afin de simplifier les notations, nous faisons les choix de ne plus faire apparaître les indices t dans les quantités que nous considérons, que ce soit les opérateurs, les valeurs propres ou les fonctions propres.

Fixons un entier positif k tel que $\lambda_{k+1}(A) \neq \lambda_k(A)$. Soit 5μ un minorant de tous les sauts de valeurs propres dans la suite des $k+1$ premières valeurs propres de A, i.e :

$$0 < 5\mu < \min\left\{\lambda_{i+1}(A) - \lambda_i(A) / i \leq k \text{ et } \lambda_{i+1}(A) \neq \lambda_i(A)\right\}.$$

D'après la proposition 2.2.6, il existe un entier $n_0 = n_0(k,\mu)$ tel que, pour tout n supérieur à n_0 et tout i inférieur à $k+1$,

$$|\lambda_i - \lambda_{i,n}| \leq 2\mu.$$

Ainsi pour un tel couple d'entiers (i,n),

$$\dim \ker(A - \lambda_i I) = \dim \oplus_{\lambda_i - 2\mu < \lambda < \lambda_i + 2\mu} \ker(A_n - \lambda I).$$

Nous noterons alors

$$\begin{aligned} G_i &:= \ker(A - \lambda_i I) \\ G_{i,n} &:= \oplus_{\lambda_i - 2\mu < \lambda < \lambda_i + 2\mu} \ker(A_n - \lambda I). \end{aligned}$$

L'objectif est de prouver qu'à partir d'un certain rang n_1 dépendant de k et de ϵ, il existe pour tout n supérieur à n_1 une base orthonormée de G_i $\epsilon-$ proche d'une base orthonormée de $G_{i,n}$. Nous prouvons pour cela que la projection orthogonale sur G_i restreinte à $G_{i,n}$ est $\epsilon-$proche de l'identité (c'est le lemme 2.2.10), puis nous construisons grâce à cette projection une isométrie de $G_{i,n}$ dans G_i également $\epsilon-$proche de l'identité (lemme 2.2.11).

Commençons par un lemme technique :

Lemme 2.2.9 *Soit H un espace de Hilbert et $A : H \to H$ un opérateur autoadjoint positif non borné à résolvante compacte. Soit $(\varphi_k, \lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une résolution spectrale de A, où (λ_k) est une suite croissante de réels positifs. Soient $i, r \in \mathbb{N}^*$ et supposons*

$$\lambda_i = \ldots = \lambda_{i+r-1} < \lambda_{i+r} - 5\mu.$$

Soit $x \in H$ de norme 1, et posons $q(x) := (Ax, x) = \lambda_i + \alpha$, où $|\alpha| < 2\mu$. Alors, si on note p la projection orthogonale sur $Vect(\varphi_i, \ldots, \varphi_{i+r-1})$, et Π la projection orthogonale sur $Vect(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})$,

$$\|p(x) - x\|^2 \leq \left[\frac{\lambda_i + |\alpha|}{\mu} - 1\right] \|\Pi(x)\|^2 + \frac{|\alpha|}{\mu}$$

Démonstration : Nous noterons $x_k := (x, \varphi_k)$.

$$q(x) = \lambda_i + \alpha \Longleftrightarrow (\lambda_i + \alpha) \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k x_k^2.$$

D'où

$$\sum_{k \geq i+r} x_k^2 \leq \sum_{k \geq i+r} \frac{\lambda_k - \lambda_i - \alpha}{\lambda_{i+r} - \lambda_i - \alpha} x_k^2 = \sum_{k \leq i+r-1} \frac{\lambda_i - \lambda_k + \alpha}{\lambda_{i+r} - \lambda_i - \alpha} x_k^2.$$

Or $\lambda_{i+r} - \lambda_i - \alpha \geq 5\mu - \alpha \geq 3\mu$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k \leq i+r-1} x_k^2 &= \sum_{k \geq i+r} x_k^2 \\ &\leq \frac{\lambda_i - \lambda_1 + |\alpha|}{\mu} \sum_{k \leq i-1} x_k^2 + \sum_{i \leq k \leq i+r-1} \frac{\lambda_i - \lambda_k + \alpha}{\mu} x_k^2 \\ &\leq \frac{\lambda_i + |\alpha|}{\mu} \|\Pi(x)\|^2 + \frac{|\alpha|}{\mu} \sum_{k=i}^{i+r-1} x_k^2. \end{aligned}$$

Et ainsi

$$\begin{aligned} \|x - p(x)\|^2 &= 1 - \sum_{k=i}^{i+r-1} x_k^2 \\ &\leq \left[\frac{\lambda_i + |\alpha|}{\mu} - 1 \right] \|\Pi(x)\|^2 + \frac{|\alpha|}{\mu}. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.10 *Pour tout ϵ strictement positif et inférieur à 1/2 et tout entier k, il existe un entier $n_1 = n_1(\epsilon, k)$ tel que, pour tout entier n supérieur à n_1, tout entier i inférieur à k et tout x dans $G_{i,n}$, $\|p_i(x) - x\| \leq \epsilon \|x\|$, où p_i est la projection orthogonale de $L^2(\mathcal{M})$ sur G_i.*

Démonstration : Nous procédons par récurrence sur les espaces G_i.

• Montrons le lemme pour $i = 1$. D'après le théorème de Courant, la première valeur propre de A est simple et, le graphe G_n étant connexe, la première valeur propre de A_n est également simple d'après le théorème de Perron-Frobenius (voir [Cdv1]).

Il existe $n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_1$,

$$\frac{(A\varphi_{1,n}, \varphi_{1,n})}{\|\varphi_{1,n}\|^2} = \mu_{1,n},$$

où $\lambda_1 < \mu_{1,n} < \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\epsilon$. En effet, $\big(\lambda_{1,n}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers λ_1, et

$$\left| \lambda_{1,n} - \frac{(A\varphi_{1,n}, \varphi_{1,n})}{\|\varphi_{1,n}\|^2} \right| = \left| \frac{(A\varphi_{1,n}|\varphi_{1,n})}{\big(\varphi_{1,n}|\varphi_{1,n}\big)} - \frac{(A\varphi_{1,n}, \varphi_{1,n})}{\|\varphi_{1,n}\|^2} \right| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

(voir la démonstration de la proposition sur la convergence du spectre).

Choisissons une base orthonormée $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs propres de A. Si on pose alors $x := \frac{\varphi_{1,n}}{\|\varphi_{1,n}\|} = \sum_{i=1}^{+\infty} x_{i,n} f_i$, on voit que

$$\begin{aligned}
& \mu_{1,n}\left(\sum_{i\geq 1} x_{i,n}^2\right) = \sum_{i\geq 1} \lambda_i x_{i,n}^2 \\
\Rightarrow\quad & (\mu_{1,n}-\lambda_1)x_{1,n}^2 = \sum_{i\geq 2}(\lambda_i-\lambda_1)x_{i,n}^2 \\
\Rightarrow\quad & 1-x_{1,n}^2 = \sum_{i\geq 2} x_{i,n}^2 \leq \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\sum_{i\geq 2}(\lambda_i-\lambda_1)x_{i,n}^2 \leq \frac{\mu_{1,n}-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \\
\Rightarrow\quad & \|x-x_{1,n}f_1\|^2 = \|x\|^2 - \|x_{1,n}f_1\|^2 = 1-x_{1,n}^2 \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme pour G_1, puisque $x_{1,n}f_1$ est le projeté orthogonal de $\varphi_{1,n}$ sur G_1, et $\dim G_1 = \dim G_{1,n} = 1$.

- Supposons le lemme vrai pour tout les entiers j inférieurs à i, et montrons-le pour $i+1$. Les hypothèses sont les suivantes : nous choisissons un entier n_1 tel que pour n supérieur à n_1, pour tout $j \leq i$ et tout x dans $G_{j,n}$,

$$\|p_j(x)-x\| \leq \frac{\epsilon}{i}\|x\|. \tag{2.15}$$

En particulier, dès que $\frac{\epsilon}{i} < 1$, les applications linéaires $p_j : G_{j,n} \to G_j$ sont bijectives et

$$\left\|\left(p_j : G_{j,n} \to G_j\right)^{-1}\right\| \leq 1+2\epsilon. \tag{2.16}$$

Prenons maintenant x dans $G_{i+1,n}$ de norme L^2 égale à 1, et soit Π la projection orthogonale sur $G_1 \oplus \ldots \oplus G_i$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|\Pi(x)\|^2 &= (\Pi(x),\Pi(x)) = (x,\Pi(x)) \\
&= (x,\Pi(x)-y) + (x,y) \leq \|\Pi(x)-y\| + |(x,y)|,
\end{aligned}$$

pour tout y dans $L^2(\mathcal{M})$. Prenons pour y l'unique vecteur de $\oplus_{j\leq i} G_{j,n}$ qui vérifie $\Pi(x)=\Pi(y)$. Alors

$$\|\Pi(x)-y\| = \|\Pi(y)-y\|.$$

Mais, si y_j est la j ième composante de y dans la somme $G_1 \oplus \ldots \oplus G_i$,

$$\|\Pi(y)-y\| \leq \sum_{j=1}^{i} \|\Pi(y_k)-y_k\| \leq \epsilon,$$

par hypothèse de récurrence. De plus,

$$\begin{aligned}\|y\| &= \left\|\left(\Pi : \oplus_{j\leq i} G_{j,n} \to \oplus_{j\leq i} G_j\right)^{-1} \circ \Pi(x)\right\| \\ &\leq \left\|\left(\Pi : \oplus_{j\leq i} G_{j,n} \to \oplus_{j\leq i} G_j\right)^{-1}\right\| \leq 1 + 2\epsilon,\end{aligned}$$

d'après (2.16). Donc

$$\|\Pi(x) - y\| \leq \epsilon(1 + 2\epsilon) \leq 2\epsilon.$$

Enfin, x et y appartiennent à la somme directe des sous-espaces propres associes aux k premières valeurs propres de A_n. D'après le deuxième point du lemme 2.2.8, leur énergies de Dirichlet sont bornées par une fonction de k, et donc quitte à augmenter n_1, pour n supérieur à n_1, le lemme 2.2.3 nous donne l'inégalité

$$|(x, y) - (x|y)| \leq \epsilon.$$

Comme $(x|y) = 0$, nous avons

$$\|\Pi(x)\|^2 \leq 2\epsilon + \epsilon \leq 3\epsilon. \tag{2.17}$$

Les valeurs propres discrètes convergent vers les valeurs propres continues et les énergies de Dirichlet des fonctions propres de A_n sont bornées par une fonction qui ne dépend que du numéro de la valeur propre associée. Ces deux arguments nous permettent pour la troisième fois de prouver que quitte à augmenter n_1, pour n supérieur à n_1,

$$|\lambda_{i+1,n} - (Ax, x)| =: |\alpha| \leq \epsilon\mu. \tag{2.18}$$

En utilisant (2.17) et (2.18), nous pouvons appliquer le lemme 2.2.9 à x, en posant $p := p_{i+1}$:

$$\begin{aligned}\|p_{i+1}(x) - x\|^2 &\leq \left(\frac{\lambda_{i+1} + |\alpha|}{\mu} - 1\right) \|\Pi(x)\|^2 + \epsilon \\ &\leq \left[3\left(\frac{\lambda_{i+1} + |\alpha|}{\mu} - 1\right) + 1\right]\epsilon.\end{aligned}$$

Il existe donc bien un entier n_1 à partir duquel pour tout x dans $G_{i+1,n}$,

$$\|p_{i+1}(x) - x\| \leq \epsilon\|x\|.$$

□

Lemme 2.2.11 *Soient G_1 et G_2 deux sous-espaces vectoriels de même dimension d'un Hilbert H, tels que si $p_1 : H \to G_1$ est la projection orthogonale* *sur G_1, on a pour tout x dans G_2, $\|p_1(x) - x\| \leq \epsilon\|x\|$, où $\epsilon \leq 1/2$. Supposons de plus qu'il existe sur G_2 un produit scalaire $(.|.)$ proche du produit hilbertien $(.,.)$ induit par l'inclusion $G_2 \subset H$, i.e que pour tout x, y dans G_2,*

$$\big|(x,y) - (x|y)\big| \leq \epsilon^2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.$$

Alors il existe une isométrie

$$U : \big(G_2, (.|.)\big) \to \big(G_1, (.,.)\big)$$

telle que pour tout x dans G_2,

$$\|Ux - x\| \leq 23\epsilon\|x\|,$$

où $\|.\|$ est la norme du Hilbert H.

Démonstration : Remarquons que $p_1 : G_2 \to G_1$ est injective donc bijective. Nous restreindrons toujours p_1 à G_2, si bien que nous pourrons considérer l'opérateur $p_1^{-1} : G_2 \to G_1$.

Il existe deux produits scalaires $(.,.)$ et $(.|.)$ sur G_2, donc deux adjoints de $p_1 : G_2 \to G_1$:

$$\begin{array}{rcl} \big(p_1^* : G_1 \to G_2\big) & := & \Big(p_1 : \big(G_2, (.|.)\big) \to \big(G_1, (.,.)\big)\Big)^*, \text{ et} \\ \big(p_2 : G_1 \to G_2\big) & := & \Big(p_1 : \big(G_2, (.,.)\big) \to \big(G_1, (.,.)\big)\Big)^*. \end{array}$$

Il est facile de se convaincre que p_2 est la restriction à G_1 de la projection orthogonale de H sur G_2. Pour tout élément x de G_2, nous poserons $\|x\|^2 = (x,x)$ et $|x|^2 = (x|x)$. De même, nous noterons $\|p\|$ la norme de l'opérateur p induite par celle de H. Si en revanche, l'espace de départ ou l'espace d'arrivée de p est G_2, et que l'on muni G_2 de $(.|.)$, nous noterons $|p|$ sa norme. Etablissons quelques inégalités élémentaires utiles pour cette démonstration :

1. $\|p_1^{-1}\| \leq (1-\epsilon)^{-1} \leq 1 + 2\epsilon$;
2. Pour tout y dans G_1, $\|p_2(y) - y\| \leq \|p_1^{-1}(y) - y\|$ car p_2 est la projection orthogonale sur G_2, et donc
$$\|p_2(y) - y\| \leq \epsilon\|p_1^{-1}\|\|y\| \leq \epsilon(1+2\epsilon)\|y\| \leq 2\epsilon\|y\|.$$
3. $$|p_1|^2 = \sup_{x \in G_2} \frac{(p_1(x), p_1(x))}{(x|x)} \leq \frac{1}{1-\epsilon^2} \sup_{x \in G_2} \frac{(p_1(x), p_1(x))}{(x,x)} \leq \frac{1}{1-\epsilon^2}.$$
   Donc $|p_1| \leq 1 + 2\epsilon$.

4. Pour tout y dans G_1 et x dans G_2, $(p_1^*(y)|x) = (y, p_1(x)) = (p_2(y), x)$. Donc

$$\begin{aligned}
(p_1^*(y) - p_2(y), x) &= \left|(p_1^*(y), x) - (p_1^*(y)|x)\right| \\
&\leq \epsilon^2 \|p_1^*(y)\| \|x\| \leq \epsilon^2(1+\epsilon^2)|p_1^*(y)|\|x\| \\
&\leq \epsilon^2(1+\epsilon^2)|p_1|\|y\|\|x\| \\
&\leq \epsilon^2(1+\epsilon^2)(1+2\epsilon)\|y\|\|x\| \\
&\leq \epsilon^2(1+3\epsilon)\|y\|\|x\|
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\|p_1^* - p_2\| = \sup \frac{(p_1^*(y) - p_2(y), x)}{\|x\|\|y\|} \leq 4\epsilon^2.$$

5. Pour tout y dans G_2,

$$\begin{aligned}
\|(p_1^{-1})^*(y) - y\| &\leq \|(p_1^{-1})^*\| \|p_1^*(y) - y\| \\
&\leq \left(\|(p_1^{-1})^*\|\right)\left(\|p_1^*(y) - p_2(y)\| + \|p_2(y) - y\|\right) \\
&\leq 3\epsilon\|(p_1^{-1})^*\|\|y\| \leq 3\epsilon(1+2\epsilon)\|y\| \leq 6\epsilon\|y\|.
\end{aligned}$$

$p_1^* \circ p_1 : G_2, (.|.) \to G_2, (.|.)$ est un opérateur symétrique défini positif. Il possède donc une unique racine carrée symétrique définie positive, que nous noterons $\sqrt{p_1^* \circ p_1}$. Posons alors

$$U := (p_1^{-1})^* \circ \sqrt{p_1^* \circ p_1} : \big(G_2, (.|.)\big) \to \big(G_1, (.,.)\big).$$

U est unitaire :

$$\begin{aligned}
U^*U &= \sqrt{p_1^* \circ p_1} \circ p_1^{-1} \circ (p_1^{-1})^* \circ \sqrt{p_1^* \circ p_1} \\
&= \sqrt{p_1^* \circ p_1} \circ (p_1^* \circ p_1)^{-1} \circ \sqrt{p_1^* \circ p_1} = Id_{G_2},
\end{aligned}$$

car $(p_1^* \circ p_1)^{-1}$ et $\sqrt{p_1^* \circ p_1}$ commutent. De même, $UU^* = Id_{G_1}$. U est en fait l'operateur unitaire qui apparaît dans la décomposition polaire de p_1.

Soit x dans G_2. Remarquons que

$$Ux - x = \left[(p_1^{-1})^* \left(\sqrt{p_1^* \circ p_1}(x)\right) - \sqrt{p_1^* \circ p_1}(x)\right] + \sqrt{p_1^* \circ p_1}(x) - x. \quad (2.19)$$

Or,

$$\sqrt{p_1^* \circ p_1}(x) - x = (p_1^* \circ p_1 - Id_{G_2}) \circ \left(\sqrt{p_1^* \circ p_1} + Id_{G_2}\right)^{-1}(x).$$

En effet, $\left(\sqrt{p_1^* \circ p_1} + Id_{G_2} : G_2 \to G_2\right)$ est inversible puisque toutes ses valeurs propres sont strictement supérieures à 1.

Par conséquent, si on pose $y := \left(\sqrt{p_1^* \circ p_1} + Id_{G_2}\right)^{-1}(x) \in G_2$,

$$\begin{aligned} \|\sqrt{p_1^* \circ p_1}(x) - x\| &= \|p_1^* \circ p_1(y) - y\| \\ &= \|\big(p_1^* - p_2\big)\big(p_1(y)\big) + p_2\big(p_1(y) - y\big) + p_2(y) - y\| \\ &\leq 2\epsilon\|p_1(y)\| + \|p_1(y) - y\| + \|p_2(y) - y\| \leq 4\epsilon\|y\| \\ &\leq 5\epsilon \left\| \left(\sqrt{p_1^* \circ p_1} + Id\right)^{-1} \right\| \|x\| \leq 5\epsilon\|x\|, \qquad (2.20) \end{aligned}$$

puisque $p_1^* \circ p_1$ est une matrice symétrique positive. De plus,

$$\begin{aligned} \left\| \left[(p_1^{-1})^* \left(\sqrt{p_1^* \circ p_1}(x)\right) - \sqrt{p_1^* \circ p_1}(x) \right] \right\| &\leq 6\epsilon \|\sqrt{p_1^* \circ p_1}(x)\| \\ &\leq 6\epsilon(1+\epsilon)|\sqrt{p_1^* \circ p_1}(x)| \\ &\leq 6\epsilon(1+\epsilon)|p_1|\|x\| \\ &\leq 6\epsilon(1+\epsilon)(1+2\epsilon)\|x\| \\ &\leq 18\epsilon\|x\|. \qquad (2.21) \end{aligned}$$

Enfin, grâce à (2.19), (2.20) et (2.21), nous obtenons

$$\|Ux - x\| \leq 23\epsilon\|x\|.$$

$\square$

Nous en arrivons enfin à la proposition qui établit la convergence des fonctions propres. Nous rétablissons dorénavant les notations avec les indices t.

Proposition 2.2.12 *Soient ϵ un réel strictement positif, t un nombre compris entre 0 et 1, et k_0 un réel. Il existe alors $k \geq k_0$, un entier $n_1 = n_1(\epsilon, t, k)$ et pour tout n supérieur à n_1, deux familles orthonormées $(\varphi_{1,n,t}, ..., \varphi_{k,n,t})$ et $(\varphi_{1,t}, ..., \varphi_{k,t})$ de fonctions propres respectivement de $A_{n,t}$ et de A_t telles que pour tout $i \leq k$*

$$\left\| \varphi_{i,t} - W_n\big(\varphi_{i,n,t}\big) \right\| \leq \epsilon,$$

où $\|.\|$ est la norme L^2 de la variété.

Démonstration : Soit k le plus petit entier supérieur à k_0 tel que $\lambda_{k+1,t} \neq \lambda_{k,t}$. Comme au début de cette section, fixons 5μ un minorant de tous les sauts de valeurs propres dans la suite des k premières valeurs propres de A_t. D'après la proposition 2.2.6, il existe un entier $n_0 = n_0(k, \mu, t)$ tel que pour tout n supérieur à n_0 et tout i inférieur à k,

$$|\lambda_{i,t} - \lambda_{i,n,t}| \leq 2\mu.$$

Ainsi pour un tel couple d'entiers (i, n),

$$\dim Ker(A_t - \lambda_{i,t} I) = \dim \oplus_{\lambda_{i,t} - 2\mu < \lambda < \lambda_{i,t} + 2\mu} Ker(A_{n,t} - \lambda I).$$

Nous noterons alors

$$\begin{aligned} G_{i,t} &:= Ker(A_t - \lambda_{i,t} I) \\ G_{i,n,t} &:= \oplus_{\lambda_{i,t}-2\mu<\lambda<\lambda_{i,t}+2\mu} Ker(A_{n,t} - \lambda I). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2.10, il existe un entier n_1 tel que pour tout n supérieur à n_1, tout entier i inférieur à k et tout x dans $G_{i,n,t}$, $\|p_i(x)-x\| \le \frac{\epsilon}{23}\|x\|$, où p_i est la projection orthogonale sur $G_{i,t}$.

Or, $\dim G_{i,t} = \dim G_{i,n,t}$. Nous pouvons donc utiliser le lemme 2.2.11 pour montrer qu'il existe une isométrie $U_{i,n} : G_{i,n,t} \to G_{i,t}$ telle que pour tout x dans $G_{i,n,t}$, $\|Ux - x\| \le \epsilon\|x\|$. Ainsi, il suffit pour conclure de choisir une base orthonormée $(\varphi_{i,n,t}, \dots, \varphi_{i+r,n,t})$ de $G_{i,n,t}$ constituée de fonctions propres de $A_{n,t}$ et de poser

$$\varphi_{i+j,t} := U_{i,n}(\varphi_{i+j,n,t}), \text{ pour tout } 0 \le j \le r.$$

Les résolvantes

Dans cette partie, t sera un réel fixé dans $[0,1]$. Nous n'aurons besoin dans la suite que de la convergence forte des inverses des opérateurs de Schrödinger discrets, mais avec peu d'efforts, on obtient la convergence des résolvantes uniformément pour z dans un compact convenablement choisi, aussi donnons-nous la démonstration générale. Ce résultat a pour corollaire la convergence simple en t des opérateurs $f(A_{t,n})$ vers $f(A_t)$, pour des fonctions f holomorphes qui ne croissent pas trop vite à l'infini.
Nous identifierons systématiquement les deux opérateurs suivants

$$\begin{aligned} A_{t,n} &: \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^{S_n} \text{ et} \\ W_n \circ A_{t,n} \circ p_n &: C^0(\mathcal{M}) \to H^1(\mathcal{M}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que nous noterons $A_{t,n}$ le deuxième.

Proposition 2.2.13 *Soit Π_n la projection orthogonale sur $W_n(\mathbb{R}^{S_n})$ et φ une fonction L^2 sur $\mathcal{M}$. Alors*

$$\sup_{z\in K} \left\| \left(A_t - z\right)^{-1}(\varphi) - \left(A_{t,n} - z\right)^{-1} \circ \Pi_n(\varphi) \right\|_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

où K est un compact de

$$\Omega_{\eta,n_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} / d\big(z, \sigma(A_t)\big) > \eta, d\big(z, \sigma(A_{t,n}\big) > \eta, \forall n \ge n_0 \right\}.$$

Démonstration : Soit ϵ un réel strictement positif. Fixons $k_0 = k_0(K) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{j \ge k_0} \frac{1}{|\lambda_{j,n,t} - z|^2} \le \epsilon,$$

ainsi que

$$\sum_{j\geq k_0} \frac{1}{|\lambda_{k,t}-z|^2} \leq \epsilon,$$

pour tout z dans K et tout entier $n \in \mathbb{N}$ (ceci est rendu possible par les minorations du lemme 2.2.4).

• Commençons par fixer une fonction φ de classe C^2 sur $\mathcal{M}$, et montrons la convergence simple suivante :

$$\sup_{z\in K} \left\| \big(A_t - z\big)^{-1}(\varphi) - \big(A_{t,n}-z\big)^{-1} \circ \Pi_n(\varphi) \right\|_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'après les propositions 2.2.6 et 2.2.12, il existe un entier k supérieur à k_0, un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ et deux familles orthonormées $(\varphi_{1,t},...,\varphi_{k,t})$ et $(\varphi_{1,n,t},...,\varphi_{k,n,t})$ de fonctions propres associées aux k premières valeurs propres respectivement de A_t et de $A_{n,t}$ tels que, pour tout n supérieur à n_1,

– $|\lambda_{j,n,t} - \lambda_{j,t}| \leq \epsilon$, pour tout entier $j \leq k$,
– $\|\varphi_{j,n,t} - \varphi_{j,t}\| \leq \epsilon$, pour tout entier $j \leq k$.

Nous complétons la famille $(\varphi_{1,t},...,\varphi_{k,t})$ en une base orthonormée $(\varphi_{j,t})_{j\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(\mathcal{M})$ de fonctions propres de A_t, et la famille $(\varphi_{1,n,t},...,\varphi_{k,n,t})$ en une base orthonormée $(\varphi_{j,n,t})_{1\leq j\leq \alpha_n}$ de $\mathbb{R}^{S_n}$ de fonctions propres de $A_{n,t}$. Alors, quelque soit $\varphi \in L^2$ de norme 1,

$$\begin{aligned} (A_t - z)^{-1}(\varphi) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(\varphi_{j,t},\varphi)}{\lambda_{j,t}-z}\varphi_{j,t}, \\ (A_{n,t}-z)^{-1}\circ \Pi_n(\varphi) &= \sum_{j=1}^{\alpha_n} \frac{(\varphi_{j,n,t}|\Pi_n(\varphi))}{\lambda_{j,n,t}-z}\varphi_{j,n,t}. \end{aligned}$$

Les produits scalaires dans ces deux sommes diffèrent : $(.,.)$ est le produit Hilbertien de $L^2(\mathcal{M}, dv_g)$ et $(.|.)$ est le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{S_n}$.

D'où si

$$(I) := \left\| \sum_{j\leq k} \frac{(\varphi_{j,t},\varphi)}{\lambda_{j,t}-z}\varphi_{j,t} - \frac{(\varphi_{j,n,t}|\Pi_n(\varphi))}{\lambda_{j,n,t}-z}\varphi_{j,n,t} \right\|,$$

alors

$$\left\| \left[(A_t - z)^{-1} - (A_{n,t}-z)^{-1}\circ\Pi_n\right](\varphi) \right\| \quad \leq \quad (I) + 2\epsilon.$$

Or,

$$\begin{aligned} (I) &\leq \sum_{j\leq k} \left| \frac{(\varphi_{j,t},\varphi)}{\lambda_{j,t}-z} \right| \|\varphi_{j,t} - \varphi_{j,n,t}\| + \left| \frac{(\varphi_{j,t},\varphi)}{\lambda_{j,t}-z} - \frac{(\varphi_{j,n,t}|\Pi_n(\varphi))}{\lambda_{j,n,t}-z} \right| \\ &\leq \sum_{j\leq k} \frac{\epsilon}{\eta} + \left| \frac{(\varphi_{j,t},\varphi)}{\lambda_{j,t}-z} - \frac{(\varphi_{j,n,t}|\Pi_n(\varphi))}{\lambda_{j,n,t}-z} \right|. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Grâce à la continuité uniforme de $g : (x,y) \in [-1,1] \times K \mapsto \frac{x}{y}$, la majoration par une fonction de ϵ qui admet 0 pour limite en 0 de la deuxième quantité de (2.22) découle de

1. $|\lambda_{j,t} - z - (\lambda_{j,n,t} - z)| \leq \epsilon$ pour tout j plus petit que k,
2. $|(\varphi_{j,t}, \varphi) - (\varphi_{j,n,t}|\Pi_n(\varphi))| \leq \epsilon$ pour tout n plus grand qu'un entier $n_1 \geq n_0$ dépendant d'un majorant de $\|\varphi\|_{2,\infty}$. Cette dernière égalité s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned}\big(\varphi_{j,t}, \varphi\big) - \big(\varphi_{j,n,t}|\Pi_n(\varphi)\big) &= \big(\varphi_{j,t} - \varphi_{j,n,t}, \varphi\big) + \big(\varphi_{j,n,t}, \varphi - \Pi_n(\varphi)\big) \\ &+ \big(\varphi_{j,n,t}, \Pi_n(\varphi)\big) - \big(\varphi_{j,n,t}|\Pi_n(\varphi)\big),\end{aligned}$$

où

$$\big|\big(\varphi_{j,t} - \varphi_{j,n,t}, \varphi\big)\big| \leq \|\varphi_{j,t} - \varphi_{j,n,t}\| \leq \epsilon.$$

Π_n est la projection orthogonale sur $W_n(\mathbb{R}^{S_n})$ pour la norme L^2, donc

$$\|\varphi - \Pi_n(\varphi)\|_0 \leq \|\varphi - W_n \circ p_n(\varphi)\|_0.$$

De plus, H^1 s'injecte continuement dans L^2, ce qui est équivalent à l'existence d'une constante C_g strictement positive telle que $\|f\|_0 \leq C_g\|f\|_1$ pour toute fonction f dans H^1. Ainsi,

$$\|\varphi - \Pi_n(\varphi)\|_0 \leq C_g\|\varphi - W_n \circ p_n(\varphi)\|_1 \leq C_g\epsilon,$$

pour $n \geq n_0(K, \epsilon)$ car la suite est admissible. D'où

$$\big|\big(\varphi_{j,n,t}, \varphi - \Pi_n(\varphi)\big)\big| \leq \|\varphi - \Pi_n(\varphi)\| \leq C_g\epsilon. \tag{2.23}$$

Enfin, l'inégalité

$$\big|\big(\varphi_{j,n,t}, \Pi_n(\varphi)\big) - \big(\varphi_{j,n,t}|\Pi_n(\varphi)\big)\big| \leq \epsilon \tag{2.24}$$

est une application du lemme 2.2.3.

• Soit maintenant φ une fonction L^2 sur $\mathcal{M}$ et ϵ un réel strictement positif. Il existe une fonction φ_ϵ de classe C^2 sur $\mathcal{M}$ telle que $\|\varphi - \varphi_\epsilon\|_0 \leq \epsilon$. De plus, d'après le point précédent, il existe un entier n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$\Big\|\big(A_t - z\big)^{-1}(\varphi_\epsilon) - \big(A_{t,n} - z\big)^{-1} \circ \Pi_n(\varphi_\epsilon)\Big\|_0 \leq \epsilon.$$

Alors, pour tout $z \in \Omega_{\eta,n_0}$ et tout $n \geq n_1$, si l'on pose

$$M := \Big\|\big(A_t - z\big)^{-1}(\varphi) - \big(A_{t,n} - z\big)^{-1} \circ \Pi_n(\varphi)\Big\|_0,$$

nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} M &\leq \left\| \left[\left(A_t - z\right)^{-1} - \left(A_{t,n} - z\right)^{-1} \circ \Pi_n \right] (\varphi_\epsilon) \right\| \\ &+ \left\| \left[\left(A_t - z\right)^{-1} - \left(A_{t,n} - z\right)^{-1} \circ \Pi_n \right] (\varphi - \varphi_\epsilon) \right\|_0 \\ &\leq \epsilon + 2C_K \|\varphi - \varphi_\epsilon\|, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C_K^2 &= \sup_{z \in K} \left\{ \left\| \left(A_t - z\right)^{-1} \right\|_{0,0}^2, \left\| \left(A_{t,n} - z\right)^{-1} \circ \Pi_n \right\|_{0,0}^2 \right\} \\ &= \sup_{z \in K} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{|\lambda_{j,t} - z|^2}, \sum_{j=1}^{\alpha_n} \frac{1}{|\lambda_{j,n,t} - z|^2} \right\}. \end{aligned}$$

□

Les dérivées secondes du logarithme du déterminant

Rappelons la définition des opérateurs suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \varphi \in L^2(\mathcal{M}) &\mapsto V\varphi \in L^2(\mathcal{M}), \\ \mathcal{V}_n : \varphi \in \mathbb{R}^{S_n} &\mapsto V\varphi \in \mathbb{R}^{S_n}. \end{aligned}$$

Fixons une norme $\|.\|_s$ sur chaque espace de Sobolev H^s, et notons $\|.\|_{s,t}$ les normes qu'elles induisent sur l'espace des opérateurs linéaires continus de H^s dans H^t.

Lemme 2.2.14 *Pour tout réel t dans $[0,1]$,*

1. *l'opérateur $A_t \circ \mathcal{V} \circ A_t^{-1} : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ s'étend en un endomorphisme continu de $L^2(\mathcal{M}) = H^0(\mathcal{M})$ dont la norme est majorée par une constante C_3 indépendante de t.*
2. *La norme induite de l'opérateur $A_{t,n} \circ \mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1}$ agissant sur l'espace euclidien $\left(\mathbb{R}^{S_n}, (.|.)\right)$, est majorée par une constante C_3 indépendante de t et de n.*

Démonstration : • Un opérateur pseudo-différentiel P d'ordre p sur une variété compacte $\mathcal{M}$ induit une application linéaire continue pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$P : H^{s+p} \longrightarrow H^s.$$

$A_t \circ \mathcal{V} \circ A_t^{-1}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, il induit donc un opérateur continu sur $L^2(\mathcal{M})$. Il se compose de trois opérateurs continus :

$$\begin{aligned} A_t^{-1} &: H^0 \longrightarrow H^2, \\ \mathcal{V} &: H^2 \longrightarrow H^2, \\ A_t &: H^2 \longrightarrow H^0. \end{aligned}$$

Ainsi
$$\|A_t \circ \mathcal{V} \circ A_t^{-1}\|_{0,0} \leq \|A_t^{-1}\|_{0,2}\|\mathcal{V}\|_{2,2}\|A_t\|_{2,0}.$$
Il suffit de montrer que $\|A_t^{-1}\|_{0,2}$ et $\|A_t\|_{2,0}$ sont majorées indépendamment de t. Si Δ est le laplacien défini par $A_t = \Delta + V_t$,

$$\|A_t^{-1}\|_{0,2} = \|(\Delta+1)^{-1} \circ (\Delta+1) \circ A_t^{-1}\|_{0,2} \quad \leq \quad \|(\Delta+1)^{-1}\|_{0,2}\|(\Delta+1) \circ A_t^{-1}\|_{0,0}.$$

Or, si $\mathcal{P}_t$ est l'opérateur multiplication par la fonction $V_t - 1$,

$$\begin{aligned}
\|(\Delta+1) \circ A_t^{-1}\|_{0,0} &= \| \text{ Id } + \mathcal{P}_t \circ A_t^{-1}\|_{0,0} \\
&\leq 1 + \|\mathcal{P}_t \circ A_t^{-1}\|_{0,0} \\
&\leq 1 + \big(\sup_{t\in[0,1]} \|V_t - 1\|_\infty\big)\|A_t^{-1}\|_{0,0} \\
&\leq 1 + \frac{\big(\sup_{t\in[0,1]} \|V_t - 1\|_\infty\big)}{\eta}
\end{aligned}$$

où $\eta = \inf_{t\in[0,1]} \lambda_{1,t} > 0$, d'après le théorème de Courant et le fait que les valeurs propres sont des fonctions continues de t sur $[0,1]$. En effet, $\|A_t^{-1}\|_{0,0} = \frac{1}{\lambda_{1,t}}$.
Pour $\|A_t\|_{2,0}$, la démonstration est identique.

• Le deuxième point du lemme 2.2.14 est une conséquence du résultat suivant :

Lemme 2.2.15 *Soit $\mathbb{R}^\alpha$ muni du produit scalaire canonique, dont nous noterons $\|.\|$ la norme associée. Soit A une matrice symétrique définie positive dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs et les coefficients non diagonaux sont négatifs ou nuls, et V une matrice diagonale. Alors, si l'on note*

$$\begin{aligned}
\big\|.\big\| \quad &: \quad B \in End(\mathbb{R}^\alpha) \mapsto \max_{x\in\mathbb{R}^\alpha} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}, \ \ et \\
\big\|.\big\|_\infty \quad &: \quad B \in End(\mathbb{R}^\alpha) \mapsto \max_{1\leq i,j\leq\alpha} |B_{i,j}|,
\end{aligned}$$

(où les $B_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice B), nous avons :

$$\big\|A \circ V \circ A^{-1}\big\| \leq \big\|V\big\|_\infty \Big[2\big\|A\big\|_\infty \big\|A^{-1}\big\| + 1\Big].$$

En effet, dans le cas qui nous intéresse, $\big\|A_{t,n}^{-1}\big\| = \frac{1}{\lambda_{1,t}}$ est majorée uniformément, les hypothéses sur la négativité des coefficients de $A_{n,t}$ sont vérifiées grâce au fait que c'est un opérateur de Schrödinger, et

$$\big\|A_{n,t}\big\|_\infty \leq \max_{1\leq i,j\leq\alpha_n} \{|\Delta_n|_{i,j}\} + \|V_t\|_\infty$$

est également majoré uniformément d'après l'hypothèse 3. de l'admissibilité de notre suite de triangulations.

Reste que nous n'utilisons a priori pas le produit scalaire canonique ; mais grâce à l'estimée (2.4), pour tout x dans $\mathbb{R}^{\alpha_n}$,

$$\frac{C_0^{-1}}{\alpha_n} g_{\mathrm{can}}(x,x) \leq (x|x) \leq \frac{C_0}{\alpha_n} g_{\mathrm{can}}(x,x),$$

où g_{can} est la métrique canonique sur $\mathbb{R}^{\alpha_n}$. Ainsi, la norme induite par $(.|.)$ sur l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^{S_n}$ est minorée par $C_0^{-2}\|.\|_{\mathrm{can}}$ et majorée par $C_0^2\|.\|_{\mathrm{can}}$, où C_0 est indépendante de n.

Démonstration du lemme 2.2.15 : Commençons par montrer que A^{-1} est une matrice à coefficients positifs, ce dont nous aurons besoin dans la suite. Soit $\lambda > \|A\|_\infty$,

$$e^{-tA} = e^{t(-A+\lambda I_\alpha)} e^{-t\lambda I_\alpha} = e^{-t\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{[t(-A+\lambda I_\alpha)]^n}{n!}$$

est donc une matrice à coefficients positifs. De plus, puisque A est définie positive,

$$A^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-tA} dt,$$

et A^{-1} est donc également à coefficients strictement positifs.

Si $B = [b_{ij}]_{i,j}$, nous noterons $|B|$ la matrice $\big[|b_{ij}|\big]_{i,j}$.

$$\begin{aligned}
\|B\|^2 &= \max_{x \in \mathbb{R}^\alpha} \frac{\sum_{i=1}^\alpha \left(\sum_{j=1}^\alpha b_{ij} x_j\right)^2}{\sum_{j=1}^\alpha x_j^2} \\
&\leq \max_{x \in \mathbb{R}^\alpha} \frac{\sum_{i=1}^\alpha \left(\sum_{j=1}^\alpha |b_{ij}|.|x_j|\right)^2}{\sum_{j=1}^\alpha x_j^2} \\
&\leq \max_{(x_j)_j \in (\mathbb{R}^+)^\alpha} \frac{\sum_{i=1}^\alpha \left(\sum_{j=1}^\alpha |b_{ij}|.x_j\right)^2}{\sum_{j=1}^\alpha x_j^2} \\
&\leq \max_{x \in \mathbb{R}^\alpha} \frac{\sum_{i=1}^\alpha \left(\sum_{j=1}^\alpha |b_{ij}| x_j\right)^2}{\sum_{j=1}^\alpha x_j^2} \\
&= \big\||B|\big\|^2.
\end{aligned}$$

On montrerait de même que si B et $C - B$ sont deux matrices à coefficients tous positifs, alors $\|B\| \leq \|C\|$.

Posons $A = [a_{ij}]$, $A^{-1} = [b_{ij}]$, $V = \text{Diag}(V_1, \ldots, V_\alpha)$ et $C = [c_{ij}] = A.V.A^{-1}$. Alors, pour tout $(i,j) \in \left(\mathbb{R}^\alpha\right)^2$,

$$|c_{ij}| = \sum_{k=1}^{\alpha} a_{ik}V(k)b_{kj} \leq \sum_{k=1}^{\alpha} |a_{ik}V(k)b_{kj}|,$$

ce qui, grâce à ce que l'on a supposé sur les coefficients de A et démontré sur ceux de A^{-1}, induit

$$\begin{aligned}
|c_{ij}| &\leq -\sum_{k\neq i}^{\alpha} a_{ik}|V(k)|b_{kj} + a_{ii}|V(i)|b_{ij} \\
&\leq \left\|V\right\|_\infty \left[-\sum_{k\neq i}^{\alpha} a_{ik}b_{kj} + a_{ii}b_{ij}\right] \\
&\leq \left\|V\right\|_\infty [2a_{ii}b_{ij} - \delta_{ij}] \text{ car } \sum_{k=1}^{\alpha} a_{ik}b_{kj} = \delta_{ij} \\
&\leq \left\|V\right\|_\infty \left[2\left\|A\right\|_\infty A^{-1} + I_\alpha\right]_{ij}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\left\|A.V.A^{-1}\right\| \leq \left\||C|\right\| \leq \left\|V\right\|_\infty \left[2\left\|A\right\|_\infty \left\|A^{-1}\right\| + 1\right].$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.15 et donc du lemme 2.2.14.

□

Proposition 2.2.16

$$\sup_{t\in[0;1]} |f_n''(t) - f''(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration : D'après le lemme 1.4.1,

$$\begin{aligned}
f''(t) &= -\text{Trace}\left(\mathcal{V} \circ A_t^{-1} \circ \mathcal{V} \circ A_t^{-1}\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathcal{V} \circ A_t^{-1} \circ \mathcal{V} \circ A_t^{-1}(\varphi_{j,t}), \varphi_{j,t}\right), \text{ et} \\
f_n''(t) &= -\text{Trace}\left(\mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1} \circ \mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1}\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{\alpha_n} \left(\mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1} \circ \mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1}(\varphi_{j,n,t})|\varphi_{j,n,t}\right).
\end{aligned}$$

• Nous allons prouver la convergence simple en t. Fixons donc t dans $[0,1]$ et ϵ un réel strictement positif. Il existe un entier k_0 tel que

$$\sum_{j\geq k_0} \frac{C_3\|V\|_\infty}{C_1^2 j^2} \leq \epsilon,$$

où C_3 et C_1 sont deux constantes dont l'existence nous est donnée respectivement par les lemmes 2.2.14 et 2.2.4. Soit alors $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=k}^{\infty}\left(\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\circ\mathcal{V}\circ A_t^{-1}(\varphi_{j,t}),\varphi_{j,t}\right)\right| &= \left|\sum_{j\geq k}\frac{\int \mathcal{V}\circ A_t^{-1}\circ\mathcal{V}(\varphi_{j,t})\varphi_{j,t}}{\lambda_{j,t}}\right| \\
&= \left|\sum_{j\geq k}\frac{\int \mathcal{V}\circ A_t^{-1}\circ\mathcal{V}(\varphi_{j,t})A_t(\varphi_{j,t})}{\lambda_{j,t}^2}\right| \\
&= \left|\sum_{j\geq k}\frac{\int A_t\circ\mathcal{V}\circ A_t^{-1}(V\varphi_{j,t})\varphi_{j,t}}{\lambda_{j,t}^2}\right| \\
&\leq \sum_{j\geq k_0}\frac{\|V\|_\infty\|A_t\circ\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\|_{0,0}}{\lambda_{j,t}^2} \\
&\leq \sum_{j\geq k_0}\frac{C_3\|V\|_\infty}{C_1^2 j^2}\leq \epsilon. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

On obtient de même

$$\sum_{j=k}^{\alpha_n}\left(\mathcal{V}_n\circ A_{t,n}^{-1}\circ\mathcal{V}_n\circ A_{t,n}^{-1}(\varphi_{j,n,t})|\varphi_{j,n,t}\right)\leq\epsilon. \qquad (2.26)$$

Il existe, d'après les propositions 2.2.12 et 2.2.6, un réel $k \geq k_0$, un entier $n_1 = n_1(\epsilon, t, k_0)$ tels que $\forall n \geq n_1$, il existe des bases orthonormées de vecteurs propres associées aux k premières valeurs propres de A_t et $A_{n,t}$, telles que $\left\|\varphi_{j,t} - W_n(\varphi_{j,n,t})\right\| \leq \epsilon$ et $|\lambda_{j,t} - \lambda_{j,n,t}| \leq \epsilon$, pour tout $j \leq k$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|f_n''(t)-f''(t)| &\leq (2.25)+(2.26)+\sum_{j=1}^{k}\Big|\left(\mathcal{V}\circ A_t^{-1}\circ\mathcal{V}\circ A_t^{-1}(\varphi_{j,t}),\varphi_{j,t}\right) \\
&- \left(\mathcal{V}_n\circ A_{t,n}^{-1}\circ\mathcal{V}_n\circ A_{t,n}^{-1}(\varphi_{j,n,t})|\varphi_{j,n,t}\right)\Big| \\
&\leq 2\epsilon+\sum_{j=1}^{k}\left|\frac{(A_t^{-1}(V\varphi_{j,t}),V\varphi_{j,t})}{\lambda_{j,t}}-\frac{(A_{t,n}^{-1}(V\varphi_{j,t,n})|V\varphi_{j,t,n})}{\lambda_{j,t,n}}\right|. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Nous noterons systématiquement dans la suite de cette démonstration $\|.\|$ la norme sur $W_n(\mathbb{R}^{S_n})$ issue de $(.|.)$, et $\|.\|_0$ la norme hilbertienne de $L^2(\mathcal{M})$.

Posons $0 < m^{-1} = \min_{n\geq n_1}\{\lambda_{1,t}, \lambda_{1,n,t}\}$. Alors $\|A_t^{-1}\|_{0,0} \leq m$ et $\|A_{t,n}^{-1}\| \leq m$. A nouveau, grâce à la continuité uniforme de la fonction

$$(x,y)\in[-m\|V\|_\infty^2, m\|V\|_\infty^2]\times[m^{-1}, C_2k]\mapsto\frac{x}{y},$$

il suffit de montrer dans la somme (2.27) respectivement la proximité des numérateurs et des dénominateurs. Pour les dénominateurs, ça ne pose aucun problème. Pour les numérateurs, nous décomposons la différence

$$\left|(A_t^{-1}(V\varphi_{j,t}), V\varphi_{j,t}) - (A_{t,n}^{-1}(V\varphi_{j,t,n})|V\varphi_{j,t,n})\right| \leq (I)+(II)+(III)+(IV)+(V),$$

où

$$\begin{aligned}
(I) &= \left|\Big(A_{t,n}^{-1}(V\varphi_{j,n,t})|\Pi_n(V\varphi_{j,t}) - V\varphi_{j,n,t}\Big)\right|, \\
(II) &= \left|\Big(A_{t,n}^{-1}(V\varphi_{j,n,t} - \Pi_n(V\varphi_{j,t}))|\Pi_n(V\varphi_{j,t})\Big)\right|, \\
(III) &= \left|\Big(A_{t,n}^{-1} \circ \Pi_n(V\varphi_{j,t})|\Pi_n(V\varphi_{j,t})\Big) - \Big(A_{t,n}^{-1} \circ \Pi_n(V\varphi_{j,t}), \Pi_n(V\varphi_{j,t})\Big)\right|, \\
(IV) &= \left|\Big((A_{t,n}^{-1} \circ \Pi_n - A_t^{-1})(V\varphi_{j,t}), \Pi_n(V\varphi_{j,t})\Big)\right|, \\
(V) &= \left|\Big(A_t^{-1}(V\varphi_{j,t}), V\varphi_{j,t} - \Pi_n(V\varphi_{j,t})\Big)\right|.
\end{aligned}$$

Alors

$$(I) \quad \leq \quad \|A_{t,n}^{-1}(V\varphi_{j,n,t})\|.\|\Pi_n(V\varphi_{j,t}) - V\varphi_{j,n,t}\|.$$

Puisque les énergies de Dirichlet des fonctions $\{\Pi_n(V\varphi_{j,t})$ et $V\varphi_{j,n,t}, n \in \mathbb{N}, t \in [0,1]\}$ sont uniformément bornées, nous pouvons, quitte à augmenter n_1, supposer grâce au lemme 2.2.3, que

$$\|\Pi_n(V\varphi_{j,t}) - V\varphi_{j,n,t}\| \leq (1+\epsilon)\|\Pi_n(V\varphi_{j,t}) - W_n\big(V\varphi_{j,n,t}\big)\|_0.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(I) &\leq m\|V\|_\infty \|\Pi_n(V\varphi_{j,t}) - W_n(V\varphi_{j,n,t})\|_0(1+\epsilon) \\
&\leq m\|V\|_\infty \|V\varphi_{j,t} - W_n(V\varphi_{j,n,t})\|_0(1+\epsilon) \\
&\leq m\|V\|_\infty \left[\|V\varphi_{j,t} - VW_n(\varphi_{j,n,t})\|_0 + \|VW_n(\varphi_{j,n,t}) - W_n(V\varphi_{j,n,t})\|_0\right](1+\epsilon) \\
&\leq m\|V\|_\infty \left[\|V\|_\infty\epsilon + \|VW_n(\varphi_{j,n,t}) - W_n(V\varphi_{j,n,t})\|_0\right](1+\epsilon).
\end{aligned}$$

Or, il est facile de se convaincre, en décomposant $W_n(V\varphi_{j,n,t})$ et $VW_n(\varphi_{j,n,t})$ sur chaque $2-$cellule $T_{p,n}$ de la triangulation que

$$\left\|VW_n(\varphi_{j,n,t}) - W_n(V\varphi_{j,n,t})\right\|_0 \leq Vol_g(\mathcal{M})\|V\|_\infty \max_p \big(\mathrm{diam}(T_{p,n})\big)\|\varphi_{j,n,t}\|_\infty.$$

L'admissibilité de la suite nous assure alors que $\max_p\big(\mathrm{diam}(T_{p,n})\big)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et un résultat classique de théorie spectrale (voir le livre de Gilkey [Gil]) dit que la norme infini d'une fonction propre associée à la $j^{\text{ième}}$ valeur propre de A_t est majorée par une fonction de j. Il en est de même pour $A_{t,n}$ puisque les fonctions propres discrètes convergent uniformément vers leurs analogues continus.

De même,

$$\begin{aligned}
(II) &\leq m\|\Pi_n(V\varphi_{j,t}) - V\varphi_{j,n,t}\|.\|V\varphi_{j,t}\| \\
&\leq m\|\Pi_n(V\varphi_{j,t}) - W_n(V\varphi_{j,n,t})\|_0.\|V\varphi_{j,t}\|_0(1+\epsilon)^2 \\
&\leq m\|V\|_\infty\|\Pi_n(V\varphi_{j,t}) - W_n(V\varphi_{j,n,t})\|_0(1+\epsilon)^2 \\
&\leq m\|v\|_\infty(\|V\|_\infty + 1)\epsilon(1+\epsilon)^2.
\end{aligned}$$

De plus,

$$(V) \leq m\|V\|_\infty\|V\varphi_{j,t} - \Pi_n(V\varphi_{j,t})\|.$$

Pour (V), on conclut grâce à l'admissibilité de la suite :

$$\begin{aligned}
\|V\varphi_{j,t} - \Pi_n(V\varphi_{j,t})\|_0 &\leq \|V\varphi_{j,t} - W_n \circ p_n(V\varphi_{j,t})\|_0 \\
&\leq C_g\|V\varphi_{j,t} - W_n \circ p_n(V\varphi_{j,t})\|_1,
\end{aligned}$$

C_g étant la constante provenant de la continuité de l'inclusion $H_1 \subset H_0$.

Pour (IV), cela provient de la convergence forte des résolvantes discrètes, donc des inverses discrètes.
Pour (III), d'après le lemme (2.2.3), il suffit de prouver que $\Pi_n(V\varphi_{j,t})$ et $A_{t,n}^{-1} \circ \Pi_n(V\varphi_{j,t})$ ont des énergies de Dirichlet bornées par une fonction dépendant de k. Posons $\psi_n := A_{t,n}^{-1} \circ \Pi_n(V\varphi_{j,t})$. Alors

$$\Delta_n\psi_n + V_t\psi_n = A_{t,n}\psi_n = \Pi_n(V\varphi_{j,t}),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{M}} |\nabla\psi_n|_0^2 &= (\Delta_n\psi_n|\psi_n) = (\Pi_n(V\varphi_{j,t})|\psi_n) - (V_t\psi_n|\psi_n) \\
&\leq \left(\|\Pi_n(V\varphi_{j,t})\|_0^2 + \|V_t\|_\infty\|\psi_n\|\right)\|\psi_n\|.
\end{aligned}$$

Or, $\|\psi_n\|_0 \leq m\|\Pi_n(V\varphi_{j,t})\|_0 \leq m\|V\|_\infty\|\varphi_{j,t}\|_0$ est bornée par une fonction de k. Enfin, $\Pi_n(V\varphi_{j,t})$ converge pour la norme H^1 vers $V\varphi_{j,t}$, son énergie de Dirichlet est donc aussi bornée par une fonction de k.

Ainsi, pour tout réel $\epsilon > 0$, et tout élément t de $[0,1]$, il existe un rang $n_1(t,\epsilon)$ tel que, pour tout entier n supérieur à n_1,

$$\left|f_n''(t) - f''(t)\right| \leq \epsilon.$$

• Prouvons enfin la convergence uniforme. Les fonctions f_n'' et f'' sont en fait holomorphes sur un voisinage U, d'adhérence compacte, de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.17 *Il existe une constante C telle que pour tout entier n positif,*

$$\sup_{t\in U} |f_n''(t)| \leq C.$$

Nous différons la démonstration de ce lemme afin d'achever celle de la proposition 2.2.16.

□

$(f_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite bornée de fonctions holomorphes sur U. D'après le théorème de Montel, cette suite est relativement compacte dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur U muni de la convergence uniforme sur tout compact de U. Or, cette suite ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. En effet, si

$$f''_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} g \text{ et } f''_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} h,$$

(où $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont des fonctions strictement croissantes) g et h sont des fonctions holomorphes sur U qui coïncident sur $[0,1]$ puisque f_n'' converge simplement vers f'' sur ce compact. L'intervalle $[0,1]$ possédant au moins un point d'accumulation, g et h coïncident sur U. Enfin, toute suite incluse dans un compact qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence est une suite convergente, donc $(f_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers f''. En particulier,

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|f_n'' - f''\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 2.2.16 et donc celle du théorème 0.0.3.

□

La démonstration du lemme 2.2.17 dans le cas où t est réel est une simple conséquence de $f_n'' = -\mathrm{Trace}\left(\mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1} \circ \mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1}\right)$ et du fait que $\mathcal{V}_n$ et $A_{t,n}^{-1}$ sont des matrices à coefficients positifs ou nuls. Dans le cas où t est complexe, nous allons utiliser la norme trace. Commençons par énoncer quelques résultats à propos de cette norme dont les démonstrations figurent dans le livre de Barry Simon [Si].

Soit H un espace de Hilbert complexe, que nous supposerons de dimension finie α puisque c'est le seul cadre qui nous sera utile.

Soit M un endomorphisme de H, et M^* son adjoint. M^*M est un opérateur positif et il existe un unique endomorphisme positif sur H, noté $\sqrt{M^*M}$, dont le carré est égal à M^*M. Nous posons alors

$$\left|M\right| := \sqrt{M^*M}.$$

Il existe de plus une suite

$$\mu_1(M) \geq \mu_2(M) \geq \ldots \geq \mu_\alpha(M) \geq 0$$

et deux bases orthonormées $\big(\varphi_k\big)_{1\le k\le\alpha}$ et $\big(\psi_k\big)_{1\le k\le\alpha}$ telles que

$$M = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu_k(M)\big(.|\varphi_k\big)\psi_k.$$

La famille $\big(\mu_k(M)\big)_{1\le k\le\alpha}$ est en fait la suite des valeurs propres de $|M|$ rangées par ordre décroissant. Elles sont appelées valeurs singulières de M.

Il est alors facile de voir que si M et N sont deux endomorphismes de H,

1. $\big|\mathrm{Trace}(M)\big| \le \mathrm{Trace}\big|M\big|$;
2. $\mu_k(M^{-1}) = \big(\mu_k(M)\big)^{-1}$ si M est inversible ;
3. $$\mu_k(M) = \max_{\dim G=k}\ \min_{x\in G} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}, \tag{2.28}$$
   en appliquant le principe du min-max à M^*M et en utilisant $\big(\mu_k(M)\big)^2 = \lambda_{\alpha-k}(M^*M)$;
4. $$\mu_k(MN) \le \|M\|\mu_k(N) \tag{2.29}$$
   où $\|M\|$ est la norme induite sur les endomorphismes de H par la norme Hilbertienne de cet espace. (2.29) implique en particulier
   $$\big|\mathrm{Trace}(MN)\big| \le \|M\|\mathrm{Trace}\big|N\big|.$$

Il existe enfin une inégalité entre les valeurs singulières de deux endomorphismes et de leur produit (voir le théorème 1.15 page 12 de [Si]) :

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \mu_k(MN) \le \sum_{k=1}^{\alpha} \mu_k(M)\mu_k(N). \tag{2.30}$$

Démonstration du lemme 2.2.17 :

$$\begin{aligned}
|f_n''(t)| &= \big|\mathrm{Trace}\left(\mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1} \circ \mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1}\right)\big| \\
&\le \mathrm{Trace}\left(\big|\mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1} \circ \mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1}\big|\right) \\
&\le \|V\|_\infty \mathrm{Trace}\left(\big|A_{t,n}^{-1} \circ \mathcal{V}_n \circ A_{t,n}^{-1}\big|\right),
\end{aligned}$$

puisque $\|\mathcal{V}_n\| = \|V\|_\infty$. Or,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Trace}\left(\left|A_{t,n}^{-1}\circ\mathcal{V}_n\circ A_{t,n}^{-1}\right|\right) &= \sum_{k=1}^{\alpha_n}\mu_k\left(A_{t,n}^{-1}\circ\mathcal{V}_n\circ A_{t,n}^{-1}\right)\\
&\leq \sum_{k=1}^{\alpha_n}\mu_k\left(A_{t,n}^{-1}\right)\mu_k\left(\mathcal{V}_n\circ A_{t,n}^{-1}\right) \qquad (2.31)\\
&\leq \sum_{k=1}^{\alpha_n}\mu_k\left(A_{n,t}^{-1}\right)^2\|V\|_\infty. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

(2.31) provient de (2.30), et (2.32) est une conséquence de (2.29).

Enfin, puisque $\mu_k\left(A_{t,n}^{-1}\right)^2=\mu_k\left(A_{t,n}\right)^{-2}$,

$$f_n''(t)\leq\|V\|_\infty^2\sum_{k=1}^{\alpha_n}\left(\frac{1}{\mu_k(A_{n,t})}\right)^2.$$

Nous nous aidons alors de (2.28) pour obtenir

$$\mu_k(A_{n,t})=\mu_k(\Delta_n+V_t)\geq\mu_k(\Delta_n)-\|V_t\|_\infty.$$

Comme de plus pour tout entier k compris entre 1 et α_n,

$$\mu_k(\Delta_n)=\lambda_{\alpha_n-k}(\Delta_n)\geq C_1(\alpha_n-k),$$

nous pouvons finalement écrire

$$\left|f_n''(t)\right|\leq\|V\|_\infty^2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{C_1k-\inf_{t\in[0,1]}\|V_t\|_\infty}\right)^2<+\infty.$$

□

2.3 Les tores plats

Pour prouver la convergence uniforme de la suite (f_n'), et donc le théorème 1, il suffit maintenant de montrer que $f_n'(0)\xrightarrow[n\to\infty]{}f'(0)$. Nous supposerons dorénavant que V_0 est une constante. Par rapport aux dérivées secondes, la difficulté ici est que nous ne disposons pas d'une expression explicite de $f'(0)=\frac{d}{dt}\ln\det_\zeta A_t$. Cette quantité est a priori définie via le prolongement d'une fonction ζ généralisée. Aussi n'avons-nous pas pu prouver en toute généralité cette convergence. Nous nous restreindrons dans la section 2.3 aux tores plats, dont nous avons d'une part pu montrer dans (1.26) que

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}\ln\det{}_\zeta\left(\Delta_g+V_0+tV\right)=0,$$

et surtout sur lesquelles nous allons exhiber des suites admissibles de triangulations dont les laplaciens se diagonalisent facilement. L'estimation de

$$\left(\frac{d}{dt}_{|t=0} \ln\det\left(\Delta_n + V_0 + tV\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

devient alors aisée.

Dans la suite, nous identifierons sans le préciser notre tore plat $(\mathcal{M}, g)$ à $\mathbb{R}^2/\Lambda$, où $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}r.e^{i\theta}$, où (θ, r) seront choisis dans $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}] \times [1, +\infty[$, ce qui est toujours possible à une isométrie et une homothétie près.

2.3.1 Une triangulation

Nous définissons une suite de graphes $(G_n)_{n\geq 3}$, qui s'identifient canoniquement à des triangulations de $\mathcal{M}$, et nous montrons qu'elle est admissible au sens défini dans le paragraphe précédent.

Graphe : (figure 2.1) Ajoutons au graphe $\frac{1}{n}\Lambda$ défini ci-dessus les arêtes reliant les sommets de coordonnées (i, j) à $(i + 1, j - 1)$ dans la base $(\frac{1}{n}\vec{i}, \frac{1}{n}\vec{u_\theta})$ (où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, et $\vec{u_\theta} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$), et ce pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$. Si on note ce graphe Λ'_n, nous posons

$$G_n := \Lambda'_n/\Lambda.$$

Plongement : Cette construction fournit une application linéaire injective canonique

$$j_n : G_n \hookrightarrow \mathbb{R}^2/\Lambda$$

où les arêtes de G_n s'identifient à des segments de $\mathbb{R}^2/\Lambda$, et les faces à des triangles euclidiens isométriques deux à deux. Nous noterons $\mathbb{R}^{S_n}$ l'ensemble $\{f : S_n \mapsto \mathbb{R}\}$. Cet espace vectoriel s'injecte canoniquement dans $L^2(\mathcal{M})$ par l'application de Whitney :

$$W_n : \mathbb{R}^{S_n} \longrightarrow H^1(\mathcal{M}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{M})$$

qui consiste à prolonger $f \in \mathbb{R}^{S_n}$ en une fonction affine sur chaque triangle (W_n est en fait à valeurs dans $H^{\frac{3}{2}-\epsilon}$).

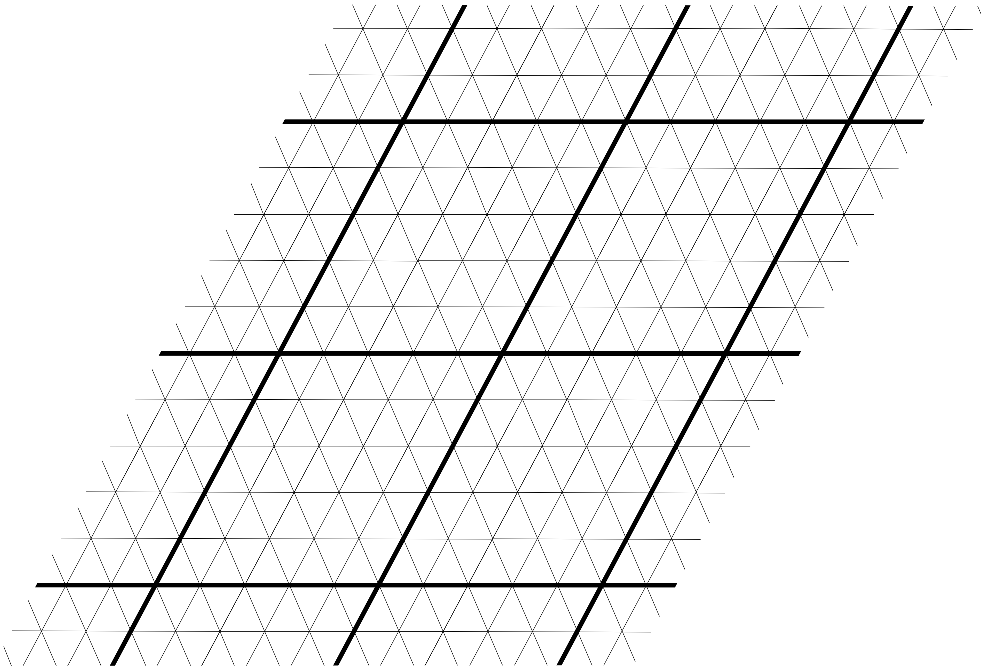

FIG. 2.1 – **Triangulation** G_5

Produit scalaire : Nous définissons un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{S_n}$ par

$$(f,g) \in (\mathbb{R}^{S_n})^2 \mapsto (f|g) := \frac{r\sin\theta}{n^2} \sum_{v \in S_n} f(v)g(v).$$

Cette norme rend orthogonale la base canonique de $\mathbb{R}^{S_n}$, et nous permettra le calcul explicite du spectre des laplaciens.

Energie de Dirichlet : $W_n(\mathbb{R}^{S_n})$ étant inclus dans H^1, nous prendrons la restriction à $W_n(\mathbb{R}^{S_n})$ de l'énergie de Dirichlet donnée par la métrique g sur $\mathcal{M}$. Ainsi, nous associons à tout opérateur de Schrödinger $A = \Delta_g + V$ sur $\mathcal{M}$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{S_n}$

$$q_n : f \in \mathbb{R}^{S_n} \mapsto \int_{\mathrm{M}} g^\sharp(dW_n(f), dW_n(f))_{|x} dv_g(x) + \Big(p_n(V)f|p_n(f)\Big).$$

2.3.2 Admissibilité

Préliminaires

Lemme 2.3.1 *Soit T le triangle du plan muni d'une base orthonormée, dont les affixes des sommets sont $0, 1, re^{i\theta}$, pour $r \geq 1$ et $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. Soit aussi f la restriction à T d'une fontion de classe $C^2(U, \mathbb{R})$, où U est un ouvert du plan contenant T, nulle en chacun des sommets du bord. Si on note ϵ le diamètre de T, α son aire et M une borne sur la norme L^∞ des dérivées partielles secondes de f, nous avons les estimations suivantes :*

1.
$$|\int_T f^2(x)dx| \leq \alpha\epsilon^2 \|\nabla f\|_\infty^2,$$

2.
$$\int_T \|\nabla f\|^2(x)dx \leq \frac{\alpha\epsilon^2 M^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Démonstration : Nous identifierons tout point du plan avec son affixe, et nous noterons $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ les dérivées partielles de f dans les deux directions du repère.
(1) : Pour tout point x de $T, |f(x)| \leq \|\nabla f\|_\infty \epsilon$, et donc $\int_T f^2(x)dx \leq \alpha\epsilon^2 ||\nabla f\|_\infty^2$.
(2) : Il existe un point $t \in]0,1[\subset T$ tel que $f(1) - f(0) = \nabla f(t).\vec{i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t) = 0$. Ceci implique que, pour tout point N du plan,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(N)\right| \leq \epsilon \left\|\nabla \frac{\partial}{\partial x} f\right\|_\infty \leq \epsilon M.$$

On montre de même que $\left|\nabla f(N).\vec{u}_\theta\right| \leq \epsilon M$, et ainsi

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(N)\right| &= \frac{1}{\sin\theta}\left|\nabla f.\vec{u}_\theta - \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\theta\right| \\ &\leq \frac{M}{\sin\theta}\left[\epsilon + \epsilon\cos\theta\right] \\ &\leq \frac{\epsilon M}{\tan\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \leq \frac{\epsilon^2 M^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{2.33}$$

□

Estimations des énergies

Nous allons montrer que la fonction $W_n \circ p_n(f)$ est proche en norme H_1 de f, et nous allons estimer la différence entre les normes de ces deux fonctions. Rappelons que $W_n \circ p_n(f)$ est la fonction de $W_n(\mathbb{R}^{S_n})$ qui coïncide avec f sur les sommets du graphe G_n et que l'on étend de manière affine sur l'intérieur de chaque triangle. Ceux-ci sont tous isométriques et obtenus par une similitude de rapport $\frac{1}{n}$ à partir du triangle dont les sommets ont pour affixes $1, 0, r.e^{i\theta}$. Leur diamètre ϵ et leur aire α vérifient donc

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}}{n} \leq \frac{r+1}{n}, \\ \alpha &= \frac{r\sin\theta}{2n^2}. \end{aligned}$$

Nous noterons $f_n := W_n \circ p_n(f)$.

Lemme 2.3.2 *Soit f une fonction continue sur $\mathcal{M}$ et C^2 en restriction à chaque triangle et posons $M \geq \|f\|_{2,\infty}$. Alors*

1.
$$\int_M |f - f_n|^2(x)dx \leq \frac{2r(r+1)^4}{n^4 \tan\frac{\theta}{2}} M^2,$$

2.
$$\int_M \|\nabla(f - f_n)\|^2(x)dx \leq \frac{2r(r+1)^2}{n^2 \tan\frac{\theta}{2}} M^2.$$

Démonstration : $\mathcal{M}$ se décompose en $2n^2$ triangles $T_{i,n}$ de diamètre $\epsilon \leq \frac{r+1}{n}$ et d'aire $\alpha = \frac{r\sin\theta}{2n^2}$, semblabmes à T, sur lesquelles $f - f_n$ vérifie les hypothèses du lemme 2.3.1. D'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{M}} |f - f_n|^2(x)dx &= \sum_i \int_{T_{i,n}} |f - f_n|^2 \\ &\leq 2\alpha\epsilon^2 n^2 \|\nabla(f - f_n)\|_\infty^2 \\ &\leq \frac{r(r+1)^2\sin\theta}{n^2} \|\nabla(f - f_n)\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Mais d'après l'estimation (2.33), pour tout x dans $\mathcal{M}$,

$$\left|\nabla(f - f_n)\right|^2(x) \leq \frac{\epsilon^2 M^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \leq \frac{(r+1)^2 M^2}{n^2\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

ce qui prouve le premier point de la proposition.

De même,

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{M}} \|\nabla(f - f_n)\|^2(x)dx &= \sum_{i=1}^{2n^2} \int_{T_i} \|\nabla(f - f_n)\|^2(x)dx \leq 2n^2 \frac{\alpha\epsilon^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \|f\|_{2,\infty}^2 \\ &\leq \frac{2r(r+1)^2 M^2}{n^2\tan\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.3 *La suite $(G_n, j_n, (.|.), W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est admissible pour la méthode des éléments finis sur $(\mathcal{M}, g)$, au sens où nous l'avons défini dans la partie précédente.*

Démonstration : Il est clair que cette suite de triangulations vérifie les deux premières propriétés dans la définition de l'admissibilité. Dans la section suivante, nous explicitons les coefficients des laplaciens discrets : les poids sur les arêtes sont strictement positifs et uniformément bornés, ce qui implique la troisième propriété. La quatrième est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.3.4 *Soit $f \in \mathbb{R}^{S_n}$,*

$$\left|\sqrt{\int_{\mathrm{M}} W_n(f)^2(x)dx} - \sqrt{\frac{r\sin\theta}{n^2}\sum_{v\in S_n} f^2(v)}\right| \le \frac{r+1}{n}\sqrt{\int_{\mathrm{M}} \|\nabla W_n(f)\|^2 dv_g}$$

Démonstration : Découpons autour de chaque sommet v_i un losange $A_{i,n}$ centré en v_i, de telle manière que, pour tout i différent de j, $A_{i,n}$ soit le translaté de $A_{j,n}$ de vecteur $v_i - v_j$, et que la réunion de ces losanges pavent le domaine fondamental de $\mathbb{R}^2/\Lambda$. Définissons une fonction h constante par morceau en posant $h(x) = f(i)$, pour tout x dans $A_{i,n}$. La fonction h est définie presque partout sur $\mathcal{M}$ et appartient à $L^2(\mathcal{M})$. Il est clair de plus que

$$\int_{\mathrm{M}} h^2(x)dv_g(x) = \frac{r\sin\theta}{n^2}\sum_{v\in S_n} f^2(v),$$

où $\frac{r\sin\theta}{n^2}$ est l'aire du losange $A_{i,n}$.

Soit $T_{i,n}$ une 2-cellule de la triangulation, et x un point de $T_{i,n}$. Alors

$$|h(x) - W_n(f)(x)|^2 \le \|\nabla W_n(f)\|_\infty^2 (\mathrm{diam} T_{i,n})^2 = \frac{\int_{T_{i,n}} \|\nabla W_n(f)\|_0^2}{\mathrm{Aire}(T_{i,n})}(\mathrm{diam} T_{i,n})^2,$$

puisque $x \mapsto \nabla W_n(f)(x)$ est constante dans l'intérieur de $T_{i,n}$. D'où

$$\begin{aligned}
\int_{T_{i,n}} (h - W_n(f))^2(x)dv_g(x) &\le \int_{T_{i,n}} \|\nabla W_n(f)\|_0^2 dv_g (\mathrm{diam} T_{i,n})^2 \\
&\le \left(\frac{r+1}{n}\right)^2 \int_{T_{i,n}} \|\nabla W_n(f)\|_0^2 dv_g.
\end{aligned}$$

Et ainsi,

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{\int_{\mathrm{M}} W_n(f)^2(x)dx} - \sqrt{\frac{2\sin\theta}{n^2}\sum_{v\in S_n} f^2(v)}\right| &= \left|\sqrt{\int_{\mathrm{M}} W_n(f)^2(x)dx} - \sqrt{\int_{\mathrm{M}} h^2(x)}\right| \\
&\leq \sqrt{\int_{\mathrm{M}} \Big(h - W_n(f)\Big)^2} \\
&\leq \frac{r+1}{n}\sqrt{\int_{\mathrm{M}} \|\nabla W_n(f)\|_0^2 dv_g}.
\end{aligned}$$

□

L'estimation (2.8) est exactement le deuxième point du lemme 2.3.2. Montrons la propriété (2.7) qui concerne l'approximation des normes : soit $K, \epsilon > 0$ et f continue sur $\mathcal{M}$, C^2 en restriction à toute 2−cellule, et telle que $\|f\|_{2,\infty} \leq K$. Posons $f_n = W_n \circ p_n(f)$.

$$\Big|\int f^2 - (p_n(f)|p_n(f))\Big| \leq \Big|\int f^2 - \int f_n^2\Big| + \Big|\int f_n^2 - (p_n(f)|p_n(f))\Big|.$$

Or

$$\begin{aligned}
\Big|\int f^2 - \int f_n^2\Big| &= \Big|\|f\| - \|f_n\|\Big|\Big|\|f\| + \|f_n\|\Big| \\
&\leq \|f - f_n\|\Big(2\|f\| + \|f - f_n\|\Big) \leq \epsilon(\epsilon + 2K\mathrm{Vol}_g(\mathcal{M}))
\end{aligned}$$

pour $n \geq n_1(\epsilon, K)$ d'après le lemme 2.3.2, et

$$\begin{aligned}
\Big|\int f_n^2 - (p_n(f)|p_n(f))\Big| &\leq \left|\sqrt{\int f_n^2} - \sqrt{(p_n(f)|p_n(f))}\right| \\
&\times \left(\sqrt{\int f_n^2} + \sqrt{(p_n(f)|p_n(f))}\right).
\end{aligned}$$

Le deuxième terme est majoré par $2\mathrm{Vol}_g(\mathcal{M})\|f\|_\infty \leq 2\mathrm{Vol}_g(\mathcal{M})K$ et le premier est inférieur à ϵ, grâce au lemme 2.3.4 (les énergies de Dirichlet de $W_n \circ p_n(f)$ sont majorées par celle de f). □

Il resterait à montrer l'estimation (2.5), i.e la quatrième propriété. Nous allons nous en dispenser grâce à la remarque de la page 52. En effet, cette inégalité n'est utile que pour obtenir l'existence d'une constante C strictement positive telle que, pour tout entier k,

$$\lambda_k\big(\Delta_n\big) \geq Ck. \tag{2.34}$$

Or, dans le paragraphe suivant, nous explicitons ces valeurs propres pour tout entier n. Il sera alors facile d'obtenir l'inégalité (2.34).

2.3.3 Spectre et fonctions propres des Laplaciens

Une expression explicite

Proposition 2.3.5 *Si $f \in W_n(\mathbb{R}^{S_n})$, alors*

$$\int_{\mathrm{M}} \|\nabla f\|^2 = \sum_{e=(i,j)\in E_n} c_{ij}(f(i)-f(j))^2,$$

où $c_{ij} = \frac{1}{2}(\cot(\alpha)+\cot(\beta))$, α et β étant les deux angles opposés à l'arête (ij) dans les deux triangles qui lui sont adjacents.

Démonstration : Dans un repère orthonormé, fixons un triangle semblable à chaque $2-$cellule de cette triangulation, qui aura pour sommets les points d'affixes $0, 1$ et $re^{i\theta}$, en lesquels notre fonction f prend respectivement les valeurs b, c, a. On montre facilement que

$$\nabla f = (c-b)\vec{i} + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{a-b}{r} - (c-b)\cos\theta\right)\vec{j}.$$

La norme de ce vecteur vaut donc

$$\begin{aligned}\|\nabla f\|^2 &= (c-b)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\left(\frac{a-b}{r}\right)^2 + (c-b)^2\cos^2(\theta) - \frac{2(a-b)(c-b)\cos(\theta)}{r}\right)\\ &= \frac{1}{\sin^2(\theta)}(c-b)^2 + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\left(\frac{a-b}{r}\right)^2 - \frac{2(a-b)(c-b)\cos(\theta)}{r\sin^2(\theta)},\end{aligned}$$

mais $-2(a-b)(c-b) = (a-c)^2 - (a-b)^2 - (c-b)^2$, d'où

$$\|\nabla f\|^2 = (c-b)^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{r\sin^2\theta}\right] + (a-b)^2\left[\frac{1}{r^2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{r\sin^2\theta}\right] + \frac{\cos\theta}{r\sin^2\theta}(a-c)^2.$$

Si on intègre sur le triangle T, l'aire de celui-ci étant $\frac{r\sin\theta}{2}$, on obtient

$$\int_T \|\nabla f\|^2 = (c-b)^2\left[\frac{r}{2\sin\theta} - \frac{\cot\theta}{2}\right] + (a-b)^2\left[\frac{1}{2r\sin\theta} - \frac{\cot\theta}{2}\right] + \frac{\cot\theta}{2}(a-c)^2.$$

On conclut grâce au résultat suivant :

Lemme 2.3.6 *Dans un triangle $T = (ABC)$, si S est l'aire et c la longueur du côté opposé au point C, nous avons la relation suivante*

$$\cot(\widehat{A}) + \cot(\widehat{B}) = \frac{\sin(\widehat{A}+\widehat{B})}{\sin(\widehat{A})\sin(\widehat{B})} = \frac{c^2}{2S}.$$

Donc, si on note α (respectivement β) l'angle au sommet d'affixe $r.e^{i\theta}$ (respectivement 1), on voit que

$$\cot\alpha + \cot\theta = \frac{r^2}{2S} = \frac{r}{\sin\theta} \text{ et } \cot\beta + \cot\theta = \frac{1}{r\sin\theta}.$$

Ainsi,

$$\int_T \|\nabla f\|^2 dv_g = \frac{\cot\alpha}{2}(c-b)^2 + \frac{\cot\beta}{2}(a-b)^2 + \frac{\cot\theta}{2}(a-c)^2,$$

ce qui prouve la proposition, si on somme ces égalités pour tous les triangles de G_n.

□

Dans le graphe que l'on considère, tous les triangles sont semblables. Le poids des arêtes horizontales est $c_1 = \cot\alpha$, celui des arêtes «verticales» $c_2 = \cot\beta$ et celui des arêtes obliques $c_3 = \cot\theta$.

Dans toute la suite, nous ferons l'abus de notation qui consiste à identifier le couple $(k,l) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 = \mathbb{Z}_n^2$ au sommet de G_n qui correspond au point $\frac{1}{n}(k + lr.e^{i\theta}) + \Lambda$ de $\mathbb{R}^2/\Lambda$.

L'opérateur $\Delta_n : \mathbb{R}^{S_n} \mapsto \mathbb{R}^{S_n}$ défini par

$$\forall f \in \mathbb{R}^{S_n}, (\Delta_n f|f) = \int_{\mathrm{M}} \|\nabla W_n(f)\|^2 dv_g$$

s'écrit alors, pour tout couple (k,l) de $\mathbb{Z}_n^2$,

$$\begin{aligned}\Delta_n f(k,l) \quad = \quad & \frac{n^2}{r\sin\theta}\Big[2(c_1+c_2+c_3)f(k,l) - c_1\Big(f(k+1,l)+f(k-1,l)\Big) \\ -c_2\Big(f(k,l \quad + \quad & 1)+f(k,l-1)\Big) - c_3\Big(f(k-1,l+1)+f(k+1,l-1)\Big)\Big],\end{aligned}$$

où le terme $\frac{n^2}{r\sin\theta}$ provient du choix de la norme L^2 sur $\mathbb{R}^{S_n}$.

Les fonctions propres

Soit $\Lambda^* := \mathrm{Hom}(\Lambda,\mathbb{Z})$ l'ensemble des morphismes d'anneaux de Λ dans $\mathbb{Z}$, i.e le réseau dual de Λ. Cet ensemble Λ^* s'identifie à un réseau de $\mathbb{R}^2$ via le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\tau \in \Lambda^*/n\Lambda^*$, définissons $f_\tau \in \mathbb{R}^{S_n}$ par

$$\forall (k,l) \in \mathbb{Z}_n^2, f_\tau(k,l) = \exp\left[\frac{2i\pi}{n}(\tau, k\vec{i} + lr\vec{u_\theta})\right]$$

(ici, τ est identifié à l'affixe d'un de ses représentants de Λ^*).

Proposition 2.3.7 *La famille de fonctions*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{r\sin\theta}}f_\tau\right)_{\tau\in\Lambda^*/n\Lambda^*}$$

est une base orthonormée de vecteurs propres de $(\Delta_n, (.|.))$ *sur* $\mathbb{R}^{S_n}$. *Si on note* $\lambda_{\tau,n}$ *la valeur propre associée à* f_τ, *on a*

$$\lambda_{\tau,n} = \frac{4n^2}{r\sin\theta}\left[c_1\sin^2\frac{\pi(\tau,\vec{i})}{n} + c_2\sin^2\frac{\pi(\tau,\vec{u_\theta})}{n} + c_3\sin^2\frac{\pi(\tau,\vec{i}-\vec{u_\theta})}{n}\right]$$

où $\vec{u_\theta} := \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\frac{r\sin\theta}{n^2}\Delta_n f_\tau &= 2(c_1+c_2+c_3)f_\tau - c_1 f_\tau \times (e^{\frac{2i\pi<\tau,\vec{i}>}{n}} + e^{-\frac{2i\pi<\tau,\vec{i}>}{n}})\\ &- c_2 f_\tau \times (e^{\frac{2i\pi<\tau,\vec{u_\theta}>}{n}} + e^{\frac{-2i\pi<\tau,\vec{u_\theta}>}{n}})\\ &- c_3 f_\tau \times (e^{2i\pi\frac{<\tau,\vec{i}-\vec{u_\theta}>}{n}} + e^{2i\pi\frac{<\tau,\vec{u_\theta}-\vec{i}>}{n}})\\ &= \frac{r\sin\theta}{n^2}\lambda_{\tau,n}f_\tau,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\lambda_{\tau,n} &= \frac{n^2}{r\sin\theta}[2(c_1+c_2+c_3) - 2c_1\cos(2\pi\frac{(\tau,\vec{i})}{n})\\ &- 2c_2\cos(2\pi\frac{(\tau,\vec{u_\theta})}{n}) - 2c_3\cos(2\pi\frac{(\tau,\vec{i}-\vec{u_\theta})}{n})]\\ &= \frac{4n^2}{r\sin\theta}[c_1\sin^2(\frac{\pi(\tau,\vec{i})}{n}) + c_2\sin^2(\frac{\pi(\tau,\vec{u_\theta})}{n}) + c_3\sin^2(\frac{\pi(\tau,\vec{i}-\vec{u_\theta})}{n})].\end{aligned}$$

C'est donc une famille de vecteurs propres. Montrons qu'elle est orthonormée : si τ et τ' sont deux éléments de $\Lambda^*/n\Lambda^*$, nous avons

$$\begin{aligned}(f_\tau|f_{\tau'}) &= \frac{r\sin\theta}{n^2}\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}_n^2} f_\tau(k,l)\overline{f_{\tau'}(k,l)}\\ &= \frac{r\sin\theta}{n^2}\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}_n^2}\exp\left[\frac{2i\pi}{n}(\tau-\tau', k\vec{i}+lr\vec{u_\theta})\right]\\ &= r\sin\theta \text{ si } \tau=\tau'.\end{aligned}$$

Si τ est différent de τ', $(\tau-\tau',\vec{i})$ ou $(\tau-\tau', r\vec{u_\theta})$ n'est pas divisible par n. Si par exemple $(\tau-\tau',\vec{i}) = m \neq 0 \pmod n$, alors

$$
\begin{aligned}
(f_\tau|f_{\tau'}) &= \frac{r\sin\theta}{n^2}\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}_n^2}\exp\left[\frac{2i\pi}{n}(\tau-\tau',k\vec{i}+lr\vec{u_\theta})\right]\\
&= \frac{r\sin\theta}{n^2}\sum_{l=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\exp\left[\frac{2i\pi m}{n}\right]\right)^k\right)\exp\left[\frac{2i\pi l}{n}(\tau-\tau',r\vec{u_\theta})\right]\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

- **Remarque**

$$
\lambda_{\tau,n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{4\pi^2}{r\sin\theta}\left[\frac{(\tau,\vec{i})^2}{\tan\alpha}+\frac{(\tau,\vec{u_\theta})^2}{\tan\beta}+\frac{(\tau,\vec{u_\theta}-\vec{i})^2}{\tan\theta}\right].
$$

$\lambda_{\tau,n}$ étant l'énergie de Dirichlet d'une fonction qui converge au sens H^1 vers $f_\tau : x\in\mathcal{M}\mapsto e^{2i\pi(\tau,x)}$, cette suite de valeurs propres converge vers $\int_{\mathrm{M}}\|\nabla f_\tau\|^2=4\pi^2|\tau|^2$. Vérifions-le :

Lemme 2.3.8

$$
|\tau|^2=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{(\tau,\vec{i})^2}{\tan\alpha}+\frac{(\tau,\vec{u_\theta})^2}{\tan\beta}+\frac{(\tau,\vec{u_\theta}-\vec{i})^2}{\tan\theta}\right].
$$

Démonstration : τ est un élément de Λ^*, il existe donc $(k,l)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $(\tau,\vec{i})=k$ et $(\tau,\vec{u_\theta})=l$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r\sin\theta}\Big[\frac{(\tau,\vec{i})^2}{\tan\alpha}+\frac{(\tau,\vec{u_\theta})^2}{\tan\beta} &+ \frac{(\tau,\vec{u_\theta}-\vec{i})^2}{\tan\theta}\Big] = \frac{1}{r\sin\theta}\Big[(\cot\alpha+\cot\theta)k^2\\
&+ (\cot\beta+\cot\theta)l^2-2\cot\theta kl\Big]\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{r}{\sin\theta}k^2+\frac{1}{r\sin\theta}l^2-2\cot\theta kl\right]\\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}k^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}l^2-\frac{2\cos\theta}{r\sin^2\theta}kl.
\end{aligned}
$$

La deuxième égalité provenant du lemme (2.3.6).

D'autre part, dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, τ a pour coordonnées $(k,\frac{l-kr\cos\theta}{r\sin\theta})$ et un calcul simple montre que

$$
\frac{1}{\sin^2\theta}k^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}l^2-\frac{2\cos\theta}{r\sin^2\theta}kl=k^2+\left(\frac{l-kr\cos\theta}{r\sin\theta}\right)^2,
$$

ce qui prouve le lemme (2.3.8). □

2.3.4 La convergence des variations du déterminant

Rappelons que

$$\begin{aligned} A_{t,n} &:= \Delta_n + v_0 + tV, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ A_t &:= \Delta_g + v_0 + tV, \\ \mathcal{V} &:= \frac{d}{dt} A_{t,n} : f \in \mathbb{R}^{S_n} \mapsto Vf \in \mathbb{R}^{S_n}, \end{aligned}$$

où v_0 est une constante strictement positive, et $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une fonction vérifiant $\int_{\mathrm{M}} V(x) dv_g(x) = 0$.

Comme il a été expliqué dans l'introduction de cette partie, la convergence uniforme des variations du logarithme des opérateurs discrets est obtenue comme conséquence de la convergence uniforme des dérivées secondes, et de la convergence simple

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \ln \det A_{t,n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{dt}_{|t=0} \ln \det A_t.$$

Puisque $\frac{d}{dt}_{|t=0} \ln \det A_t = 0$ (voir (1.26)), le résultat est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.3.9

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt}_{|t=0} \ln \det A_{t,n} = 0.$$

Démonstration : Nous reprenons les domaines $(A_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ définis dans la démonstration du lemme 2.3.4. V est une fonction d'intégrale nulle, donc

$$\begin{aligned} \Big|(V|1)\Big| &= \Big|(V|1) - \int_{\mathrm{M}} V(x) dv_g(x)\Big| \\ &\leq \sum_i \int_{A_{i,n}} \big|V(x) - V(i)\big| dv_g(x) \\ &\leq \sum_i \text{Vol } (A_{i,n}) \text{Diam } (A_{i,n}) \big\|\nabla V\big\|_\infty \leq \frac{C}{n}, \end{aligned}$$

car $\text{diam}(A_{i,n}) \leq \frac{C}{n}$. De plus, pour tout élément τ de $\Lambda^*/n\Lambda^*$, si l'on note $\big(v_i\big)_{1\leq i\leq n^2}$ les sommets de G_n,

$$\begin{aligned} (Vf_\tau|f_\tau) &= \frac{r\sin\theta}{n^2} \sum_{i=1}^{n^2} V(v_i) f_\tau(v_i) \overline{f_\tau(v_i)} \\ &= \frac{r\sin\theta}{n^2} \sum_{i=1}^{n^2} V(v_i) = (V|1), \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité provenant du fait que les f_τ sont des exponentielles complexes. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}_{|t=0} \ln\det A_{t,n} &= \mathrm{Trace}\Big(A_{t,n}^{-1} \circ \mathcal{V}\Big) \\
&= \sum_{\tau \in \Lambda^*/n\Lambda^*} \frac{(Vf_\tau|\overline{f_\tau})}{\lambda_{\tau,n}+v_0} = \sum_{\tau \in \Lambda^*/n\Lambda^*} \frac{(V|1)}{\lambda_{\tau,n}+v_0}.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}_{|t=0} \ln\det A_{t,n}\right| &\leq \frac{C}{n}\sum_{p,l=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{4n^2}{r\sin\theta}\Big(c_1\sin^2\frac{\pi p}{n}+c_2\sin^2\frac{\pi l}{n}+c_3\sin^2\frac{\pi(p-l)}{n}\Big)+v_0} \\
&\leq \frac{Cr\sin\theta}{4n}\left(\sum_{p,l=0,(p,l)\neq(0,0)}^{n-1} \frac{1}{n^2\left(c_1\sin^2\frac{\pi p}{n}+c_2\sin^2\frac{\pi l}{n}\right)}+\frac{1}{v_0}\right) \\
&\leq \frac{Cr\sin\theta}{2n}\left(\sum_{p,l=0,(p,l)\neq(0,0)}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2\left(c_1\sin^2\frac{\pi p}{n}+c_2\sin^2\frac{\pi l}{n}\right)}+\frac{1}{2v_0}\right) \\
&\leq \frac{Cr\sin\theta}{8\pi^2 n}\sum_{p,l=0,(p,l)\neq(0,0)}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{c_1p^2+c_2l^2+v} \text{ car } \forall x\in[0,\frac{1}{2}], \sin(\pi x)\geq 2x \\
&\leq \frac{C'}{n}\sum_{0\neq p^2+l^2\leq\frac{n^2}{2}} \frac{1}{p^2+l^2} = \frac{C'}{n}\sum_{k=0}^{\mathcal{N}\left(\frac{n^2}{2}\right)} \frac{1}{\mu_k},
\end{aligned}$$

où $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est le spectre du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et $\mathcal{N}(\lambda) := \sharp\{p \in \mathbb{N}/\mu_p \leq \lambda\}$. L'asymptotique de Weyl nous assure de l'existence de deux constantes $\alpha > 0$ et β telles que $\mathcal{N}(\lambda) \leq \beta\lambda$ et $\mu_k \geq \alpha k$. D'où,

$$\sum_{k=0}^{\mathcal{N}\left(\frac{n^2}{2}\right)} \frac{1}{\mu_k} \leq \alpha^{-1}\sum_{k=1}^{\frac{\beta n^2}{2}} \frac{1}{k} = O(\ln n).$$

Donc

$$\left|\frac{d}{dt}_{|t=0} \ln\det A_{t,n}\right| \leq O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

2.4 Le cas d'une métrique quelconque

Nous démontrons le théorème 0.0.3 dans le cas général.

Soit $(\mathcal{M}, g)$ un tore de dimension 2 muni d'une métrique riemannienne. D'après le théorème d'uniformisation, il existe une métrique g_0 conforme à g, unique à homothétie près. Plus précisément, il existe un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}.1 \oplus \mathbb{Z}.re^{i\theta}$ de $\mathbb{C}$ et une fonction C^∞ $\varphi : \mathbb{R}^2/\Lambda \to \mathbb{R}$ telle que $(\mathcal{M}, g)$ est isométrique à $\left(\mathbb{R}^2/\Lambda, e^{2\varphi}g_0\right)$, où $g_0 := dx^2 + dy^2$. Pour simplifier les notations, nous poserons $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2/\Lambda$ et $g = e^{2\varphi}g_0$.

Soit V_1 un potentiel C^∞ sur $\mathcal{M}$. Nous cherchons à discrétiser l'opérateur $\Delta_g + V_1$. Nous reprenons pour cela la suite de triangulations $G_n = (V_n, E_n)$ associée à $\mathbb{R}^2/\Lambda$ définie page 77, ainsi que la forme quadratique $q_n : \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^{S_n}$ que nous noterons q_{n,g_0}. Comme structure euclidienne sur $\mathbb{R}^{S_n}$, nous prendrons, pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{S_n}$,

$$\left(f|f\right)_g := \frac{r\sin\theta}{n^2}\sum_{v\in S_n} e^{2\varphi(v)}f^2(v).$$

La discrétisation de l'opérateur $f \in L^2 \mapsto V_1 f \in L^2$ se fait de la manière la plus naturelle qui soit : nous prenons l'opérateur qui à tout vecteur δ_v de la base canonique, où $v \in S_n$, associe le vecteur $V(v)\delta_v$. Il est diagonal dans la base canonique. Quant à la suite de discrétisés $\Delta_{n,g}$ de Δ_g, nous posons

$$\Delta_{n,g} : f \in \mathbb{R}^{S_n} \mapsto e^{-2\varphi}.\Delta_{n,g_0}(f) \in \mathbb{R}^{S_n}, \tag{2.35}$$

où $e^{-2\varphi}$ est l'opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^{S_n}$ défini par $e^{-2\varphi}\left(\delta_v\right) = e^{-2\varphi(v)}\delta_v$. Il y a deux manières de justifier ce choix :

1. La première vient de la relation $\Delta_g = e^{-2\varphi}\Delta_{g_0}$ qu'il existe entre les laplaciens continus.
2. On peut aussi expliquer (2.35) en appliquant la méthode des éléments finis à g : à nouveau, l'idée est de définir l'énergie de Dirichlet discrète $q_{n,g}(f)$ associée à g d'une fonction $f \in \mathbb{R}^{S_n}$. Choisissons de prolonger f en une fonction affine sur chaque segment de la triangulation, puis en une fonction harmonique $W_{n,g}(f)$ à l'intérieur de chaque triangle, et de poser alors

$$q_{n,g}(f) := \int_{\mathrm{M}} g^\sharp\Big(dW_{n,g}(f), dW_{n,g}(f)\Big)dv_g.$$

Or les fonctions harmoniques pour g sont exactement les fonctions harmoniques pour g_0, donc $W_{n,g_0}(f) = W_{n,g}(f)$, pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{S_n}$. De plus, l'énergie de Dirichlet est un invariant conforme en dimension 2, donc

$$q_{n,g}(f) = q_{n,g_0}(f) = q_n(f).$$

L'opérateur $\Delta_{n,g} : \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}^{S_n}$ est ainsi défini par la relation suivante, valable pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^{S_n}$:

$$q_n(f) = \Big(\Delta_{n,g}(f)|f\Big)_g = \frac{r \sin\theta}{n^2} \sum_{v \in S_n} e^{2\varphi(v)} \big(\Delta_{n,g}(f)\big)(v) f(v).$$

Et comme nous avons également,

$$q_n(f) = \Big(\Delta_{n,g_0}(f)|f\Big)_{g_0} = \frac{r \sin\theta}{n^2} \sum_{v \in S_n} \big(\Delta_{n,g_0}(f)\big)(v) f(v),$$

la relation (2.35) s'en déduit facilement.

Remarquons, même si nous ne l'utiliserons pas par la suite, que g étant conforme à g_0, les angles de la triangulation sont les mêmes pour g et g_0 : les valeurs propres discrètes $\lambda_k\big(\Delta_{n,g}\big)$ convergent donc lorsque n tend vers l'infini vers $\lambda_k\big(\Delta_g\big)$, ce qui fait de $\big(\Delta_{n,g} + V_1\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite raisonnable de discrétisations de $\Delta_g + V_1$.

Revenons à la convergence des rapports des déterminants. Soient V_1 et V_0 deux potentiels positifs tels que $\int_{\mathrm{M}} V_1 dv_g = \int_{\mathrm{M}} V_0 dv_g$, et soient $A_{n,1} := \Delta_{n,g} + V_1$ et $A_{n,0} := \Delta_{n,g} + V_0$.

$$\begin{aligned} \frac{\det A_{n,1}}{\det A_{n,0}} &= \frac{\det\big(\Delta_{n,g} + V_1\big)}{\det\big(\Delta_{n,g} + V_0\big)} = \frac{\det\big(e^{-2\varphi}\Delta_{n,g_0} + V_1\big)}{\det\big(e^{-2\varphi}\Delta_{n,g_0} + V_0\big)} \\ &= \frac{\det\big(\Delta_{n,g_0} + e^{2\varphi}V_1\big)}{\det\big(\Delta_{n,g_0} + e^{2\varphi}V_0\big)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\det_\zeta \Delta_{g_0} + e^{2\varphi}V_1}{\det_\zeta \Delta_{g_0} + e^{2\varphi}V_0}. \end{aligned}$$

En effet, cette convergence est une application du cas plat du théorème 0.0.3, démontré dans la section précédente, dès lors que l'on a vu que

$$\int_{\mathrm{M}} V_1 e^{2\varphi} dv_{g_0} = \int_{\mathrm{M}} V_0 e^{2\varphi} dv_{g_0}.$$

Enfin, d'après le corollaire 1.4.4,

$$\begin{aligned} \frac{\det_\zeta \Delta_{g_0} + e^{2\varphi}V_1}{\det_\zeta \Delta_{g_0} + e^{2\varphi}V_0} &= \frac{\det_\zeta e^{2\varphi}\big(\Delta_g + V_1\big)}{\det_\zeta e^{2\varphi}\big(\Delta_g + V_0\big)} \\ &= \frac{\det_\zeta \Delta_g + V_1}{\det_\zeta \Delta_g + V_0} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{M}} \varphi(V_1 - V_0) dv_g\right\}. \end{aligned}$$

Or, si K_g est la courbure de Gauss de la métrique $g = e^{2\varphi}g_0$ et K_0 celle de g_0,

$$K_g = e^{-2\varphi}\big(\Delta_{g_0}(\varphi) + K_0\big) = \Delta_g(\varphi) + e^{-2\varphi}K_0 = \Delta_g(\varphi)$$

puisque g_0 est plate. $V_1 - V_0$ est d'intégrale nulle pour la forme volume dv_g, il existe donc un antécédent $\Delta_g^{-1}(V_1 - V_0)$ de $V_1 - V_0$. Cet antécédent est défini à une constante additive près, mais l'intégrale

$$\int_{\mathrm{M}} K_g \Delta_g^{-1}(V_1 - V_0) dv_g$$

est bien définie puisque $\int_{\mathrm{M}} K_g dv_g = 0$. Ainsi,

$$\int_{\mathrm{M}} K_g \Delta_g^{-1}(V_1 - V_0) dv_g = \int_{\mathrm{M}} \Delta_g(\varphi) \Delta_g^{-1}(V_1 - V_0) dv_g = \int_{\mathrm{M}} \varphi(V_1 - V_0) dv_g.$$

Et donc finalement,

$$\frac{\det A_{n,1}}{\det A_{n,0}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\det_\zeta \Delta_g + V_1}{\det_\zeta \Delta_g + V_0} \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{M}} K_g \Delta_g^{-1}(V_1 - V_0) dv_g \right\},$$

qui est bien le résultat annoncé. □

Une approche discrète du théorème 0.0.6

Il est possible de redémontrer le théorème 0.0.6 dans le cas des tores de dimension 2 à partir du théorème 0.0.3. Nous faisons la démonstration ci-dessous, mais nous insistons sur le fait que tous les arguments pour prouver cette inégalité sont déjà dans la démonstration du théorème 0.0.3. Ceci a donc pour seul intérêt d'exhiber un nouveau résultat sur les spectres de surfaces qu'il est possible de montrer via les spectres de graphes.

Etablissons l'analogue discret du théorème 0.0.6 :

Proposition 2.4.1 *Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de graphes définie dans la dernière partie, et Δ_n la suite de laplaciens discrets associée par la méthode des éléments finis. Alors, pour tout potentiel $V \in \mathbb{R}^{S_n}$, $V \geq 0$ non constant*

$$\det(\Delta_n + V) < \det(\Delta_n + \bar{v}),$$

où $\bar{v} := \frac{n^2}{r \sin\theta} \sum_{i \in V_n} V(i)$.

Démonstration : Il est possible de calquer mot pour mot la démonstration que nous avons utilisée pour les variétés riemanniennes compactes de dimension inférieure à 3 sur lesquelles leur groupe d'isométrie agit de manière transitive. Nous en donnerons néanmoins une démonstration légèrement différente.

Le déterminant est log-concave sur l'ensemble des matrices symétriques positives : Si Q est une telle matrice, et

$$Q(t) = Q + tB, t \in \mathbb{R}$$

une droite de matrices symétriques passant par Q, alors

$$\frac{d \log \det(Q(t))}{dt} = \mathrm{Trace}(BQ^{-1}),$$

et

$$\frac{d^2 \log \det(Q(t))}{dt^2} = -\mathrm{Trace}(BQ^{-1}BQ^{-1}).$$

Il suffit de montrer que la dernière trace est strictement positive. La matrice Q^{-1} est définie positive, et peut donc être conjuguée via une matrice orthogonale O à une matrice diagonale D, où $D_{ii} > 0$. Nous pouvons alors écrire

$$\mathrm{Trace}(BQ^{-1}BQ^{-1}) = \mathrm{Trace}(BODO^tBODO^t) = \mathrm{Trace}((O^tBO)(D(O^tBO)D).$$

Soit B' la matrice symétrique O^tBO. Nous avons $\mathrm{Trace}(BQ^{-1}BQ^{-1}) = \mathrm{Trace}(B'DB'D)$. Soit alors d le vecteur des coefficients diagonaux de D. d est donc un vecteur positif. Il est facile de voir que $\mathrm{Trace}(B'DB'D) = d^t\mathcal{B}d$, où $\mathcal{B}_{ij} = b_{ij}^2$. Donc $\mathrm{Trace}(BQ^{-1}BQ^{-1}) > 0$, et le logarithme du déterminant est bien une fonction concave sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Il reste à montrer que si $(V|1) = 0$, et v_0 est un potentiel constant strictement positif,

$$d_{v_0} \det \big(\Delta_n + .\big).V = 0,$$

ce qui est équivalent à ce que tous les termes diagonaux de la matrice $\big(\Delta_n + v_0\big)^{-1}$ soient égaux. C'est une conséquence de l'action transitive du groupe d'isométries du graphe sur les sommets. □

Pour redémontrer que sur un tore (T^2, g),

$$\det{}_\zeta(\Delta_g+V_0) \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{M}} \varphi V_0 dv_g\right\} \leq \det{}_\zeta(\Delta_g+v_0e^{2\varphi}) \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{M}} \varphi v_0 e^{2\varphi} dv_g\right\},$$

où $e^{2\varphi}g$ est de courbure constante et de même volume que g, et $v_0 := \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(\mathrm{M})}\int_{\mathrm{M}} V_0 dv_g$, il suffit de voir que la suite

$$\left(\frac{\det \Delta_{n,g} + v_0 e^{2\varphi}}{\det \Delta_{n,g} + V_0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge vers une quantité supérieure à 1. En effet, cette estimation est équivalente, d'après le théorème 0.0.3, à

$$\frac{\det_\zeta \Delta_g + v_0 e^{2\varphi}}{\det_\zeta \Delta_g + V_0} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{M}} K_g \Delta_g^{-1}(v_0 e^{2\varphi} - V_0) dv_g\right\} \geq 1.$$

Nous savons de plus, d'après la démonstration du théorème 0.0.3 que

$$-\int_{\mathrm{M}} K_g \Delta_g^{-1}(v_0 e^{2\varphi} - V_0) dv_g = \int_{\mathrm{M}} \varphi(v_0 e^{2\varphi} - V_0) dv_g.$$

Or,

$$\frac{\det \Delta_{n,g} + v_0 e^{2\varphi}}{\det \Delta_{n,g} + V_0} = \frac{\det e^{2\varphi}\Delta_{n,g_0} + v_0 e^{2\varphi}}{\det e^{2\varphi}\Delta_{n,g_0} + V_0} = \frac{\det \Delta_{n,g_0} + v_0}{\det \Delta_{n,g_0} + V_0 e^{-2\varphi}}.$$

Posons alors $m_n := \frac{r \sin\theta}{n^2} \sum_{v \in S_n} V_0(v) e^{-2\varphi(v)} = \big(V_0 e^{-2\varphi}\big|1\big)$:

$$\frac{\det \Delta_{n,g_0} + v_0}{\det \Delta_{n,g_0} + V_0 e^{-2\varphi}} = \frac{\det \Delta_{n,g_0} + v_0}{\det \Delta_{n,g_0} + m_n} . \frac{\det \Delta_{n,g_0} + m_n}{\det \Delta_{n,g_0} + V_0 e^{-2\varphi}}. \tag{2.36}$$

D'après la proposition 2.4.1, pour tout entier n,

$$\frac{\det \Delta_{n,g_0} + m_n}{\det \Delta_{n,g_0} + V_0 e^{-2\varphi}} \geq 1. \tag{2.37}$$

De plus,

$$\ln \frac{\det \Delta_{n,g_0} + v_0}{\det \Delta_{n,g_0} + m_n} = \int_0^1 \mathrm{Trace}\Big((v_0 - m_n).\big(\Delta_{n,g_0} + m_n + t(v_0 - m_n)\big)^{-1}\Big) dt.$$

Avec des calculs identiques à ceux de la démonstration du lemme 2.3.9, nous voyons que

$$\begin{aligned} v_0 - m_n &= O\Big(\frac{1}{n}\Big), \text{ et} \\ \mathrm{Trace}\Big(\Delta_{n,g_0} + m_n + t(v_0 - m_n)\Big)^{-1} &= O\Big(\ln n\Big), \end{aligned}$$

uniformément en t. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det \Delta_{n,g_0} + v_0}{\det \Delta_{n,g_0} + m_n} &= (v_0 - m_n) \int_0^1 \mathrm{Trace}\left[\Big(\Delta_{n,g_0} + m_n + t(v_0 - m_n)\Big)^{-1}\right] dt \\ &= O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Grâce à (2.36), (2.37) et (2.38),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\det \Delta_{n,g_0} + v_0}{\det \Delta_{n,g_0} + V_0 e^{-2\varphi}} \geq 1.$$

□

Annexe A

Les déterminants de laplaciens

Une question se pose naturellement :

Q1 : existe-t-il un résultat similaire au théorème 0.0.3 dans le cas des laplaciens associés à des métriques différentes ?

Une réponse positive conduirait à au moins deux nouvelles questions très intéressantes :

Q2 : Existe-t-il un analogue discret à la formule de Polyakov ?

Q3 : Peut-on redémontrer au moins dans certains cas simples que le maximum du $\zeta-$déterminant de laplaciens est atteint pour les métriques à courbure constante ?

Précisons la question **Q1** :

Soit $\mathcal{M}$ est une surface compacte sans bord, et g et g_0 deux métriques sur $\mathcal{M}$. Soit $\big(G_n = (V_n, E_n), p_n\big)$ une suite de triangulations de $\mathcal{M}$, où pour tout entier n, G_n est un graphe fini de sommets V_n et d'arêtes E_n, et où $p_n : G_n \to \mathcal{M}$ est un plongement.

Soit de plus $\Delta_{n,g}$ et Δ_{n,g_0} deux laplaciens de G_n (comme ils ont été définis dans la section 2.1 sur les laplaciens subordonnés à un graphe), éventuellement symétriques pour deux produits scalaires différents, obtenus par une méthode des éléments finis, et tels que, pour tout entier k,

$$\begin{aligned} \lambda_k\big(\Delta_{n,g}\big) &\xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_k\big(\Delta_g\big), \\ \text{et } \lambda_k\big(\Delta_{n,g_0}\big) &\xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_k\big(\Delta_{g_0}\big). \end{aligned}$$

Alors, à une normalisation près, a-t-on

$$\frac{\det' \Delta_{n,g}}{\det' \Delta_{n,g_0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\det_\zeta{}' \Delta_g}{\det_\zeta{}' \Delta_{g_0}} ?$$

Nous allons prouver ici que la réponse est négative dans le cas où $\mathcal{M} = S^1 \times S^1$ et où g et g_0 sont conformes. Evidemment, ce contre-exemple ne signifie pas qu'il est impossible d'approcher des déterminants $\zeta-$régularisés par des déterminants sur des graphes, puisqu'il existe une grande latitude à la fois dans le choix des triangulations et dans celui des métriques discrètes. Peut-être en existe-t-il de plus adaptées ! Cependant, celles que nous choisissons sont si naturelles et symétriques qu'on est en droit d'être pessimiste.

Préliminaires

Commençons par un lemme concernant les déterminants de laplaciens sur les graphes. Fixons les notations suivantes :

Soit $G = (S, E)$ un graphe fini, où S est de cardinal n. Ordonnons S en l'identifiant à $\{1, 2, \dots, n\}$.

$\left(\delta_v\right)_{v\in S}$ sera la base canonique de l'ensemble $\mathbb{R}^S$ des fonctions sur les sommets, définie par

$$\delta_v : w \in S \mapsto \delta_v(w) \in \{0, 1\}.$$

Pour tout $f \in \mathbb{R}^S$, nous notons $(f, f)_0 := \sum_v f^2(v)$.

Soit $A = \left[a_{vw}\right]_{1\leq v,w\leq n}$ la matrice d'un laplacien Δ sur G dans la base canonique. C'est-à-dire que, pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^S$ vue comme vecteur colonne,

$$^t fAf = \left(\Delta f, f\right)_0 = \sum_{(v,w)\in E} a_{vw}\left(f(v) - f(w)\right)^2.$$

Soit alors $d_1, \dots, d_n$ des réels strictement positifs, et posons

$$B = \left[a_{vw} d_v d_w\right]_{1\leq v,w\leq n}.$$

B est l'opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^S$ défini par

$$^t fAf = \left(Bf, f\right)_1,$$

où

$$\left(f, f\right)_1 := \sum_{v\in S} \frac{1}{d_v^2} f^2(v).$$

A et B sont deux laplaciens, leurs spectres sont positifs et leurs noyaux respectifs sont de dimension 1. Ordonnons leurs valeurs propres dans l'ordre croissant. Alors, en notant $\det'$ le produit des valeurs propres non nulles :

Lemme A.0.2

$$\frac{\det' B}{\det' A} := \prod_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k(B)}{\lambda_k(A)} = \frac{1}{n}\Big(\prod_{i=1}^{n} d_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} d_i^{-2}\Big).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\det\big(B+xI_n\big) &= \begin{vmatrix} a_{11}d_1^2+x & a_{12}d_1d_2 & \dots & a_{1n}d_1d_n \\ a_{12}d_1d_2 & a_{22}d_2^2+x & \dots & a_{2n}d_2d_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n}d_1d_n & \dots & \dots & a_{nn}d_n^2+x \end{vmatrix} \\
&= d_1 \begin{vmatrix} x/d_1 & x/d_2 & \dots & x/d_n \\ a_{12}d_1d_2 & a_{22}d_2^2+x & \dots & a_{2n}d_2d_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n}d_1d_n & \dots & \dots & a_{nn}d_n^2+x \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

où l'on a remplacé la première ligne L_1 par la combinaison linéaire $L_1/d_1 + L_2/d_2 + \ldots + L_n/d_n$, et utilisé le fait que les vecteurs constants sont dans le noyau de A, i.e que $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 0$, pour tout $j \in [1,.,n]$. Mais $\det' B$ est le coefficient en x dans le polynôme $\det\big(B+xI_n\big)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\det{}'B &= \lim_{x\to 0} \frac{\det\big(B+xI_n\big) - \det B}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\det\big(B+xI_n\big)}{x} \\
&= d_1 \begin{vmatrix} 1/d_1 & 1/d_2 & \dots & 1/d_n \\ a_{12}d_1d_2 & a_{22}d_2^2 & \dots & a_{2n}d_2d_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n}d_1d_n & \dots & \dots & a_{nn}d_n^2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Remplaçons la première colonne C_1 par $\sum_{i=1}^n d_i^{-1}C_i$:

$$\begin{aligned}
\det{}'B &= d_1^2 \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n d_i^{-2} & d_2^{-1} & \dots & d_n^{-1} \\ 0 & a_{22}d_2^2 & \dots & a_{2n}d_2d_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn}d_n^2 \end{vmatrix} \\
&= d_1^2 \left(\sum_{i=1}^n d_i^{-2} \right) \mathrm{Cof}_B(B_{11}), \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}$$

où $\mathrm{Cof}_B(B_{11})$ est le cofacteur du coefficient B_{11} dans la matrice B.
Le même calcul pour la matrice A conduit à

$$\det{}'A = n\mathrm{Cof}_A(a_{11}). \qquad \text{(A.2)}$$

Or,

$$\big[B_{ij}\big]_{2\le i,j\le n} = D\big[a_{ij}\big]_{2\le i,j\le n}D, \qquad \text{(A.3)}$$

où $D := \mathrm{Diag}(b_2, \dots, b_n)$. Ce qui implique, en prenant les déterminants des matrices de l'égalité (A.3),

$$\mathrm{Cof}_B(B_{11}) = \left(\prod_{i=2}^{n} b_i^2\right) \mathrm{Cof}_A(a_{11}). \tag{A.4}$$

En combinant (A.1), (A.2) et (A.4), nous obtenons le résultat du lemme A.0.2. □

Discrétisation

Soit un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}.1 \oplus \mathbb{Z}.re^{i\theta}$ de $\mathbb{C}$ et une fonction C^∞ $\varphi : \mathbb{R}^2/\Lambda \to \mathbb{R}$. Posons $\mathcal{M} := \mathbb{R}^2/\Lambda$, et soit $g_0 = dx^2 + dy^2$ la métrique euclidienne sur $\mathcal{M}$ induite par $\mathbb{R}^2$. Posons de plus $g := e^{2\varphi} g_0$.

Nous reprenons la suite de triangulations $G_n = (S_n, E_n)$ associée à $\mathbb{R}^2/\Lambda$ définie page 77, la forme quadratique $q_n : \mathbb{R}^{S_n} \to \mathbb{R}$, ainsi que l'opérateur $\Delta_{n,g_0} : \mathbb{R}^{S_n} \mapsto \mathbb{R}^{S_n}$, que nous appelons discrétisé à l'ordre n de Δ_{g_0}.

Pour la suite des discrétisés $\Delta_{n,g}$ de Δ_g, nous posons

$$\Delta_{n,g} : f \in \mathbb{R}^{S_n} \mapsto e^{-2\varphi}.\Delta_{n,g_0}(f) \in \mathbb{R}^{S_n}, \tag{A.5}$$

où $e^{-2\varphi}$ est l'opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^{S_n}$ défini par $e^{-2\varphi}\big(\delta_v\big) = e^{-2\varphi(v)}\delta_v$.

La justification de cette formule est détaillée page 88 (l'argument le plus rapide étant qu'une telle formule est vraie sur les surfaces). Δ_{n,g_0} et $\Delta_{n,g}$ sont en fait les opérateurs sur $\mathbb{R}^{S_n}$ associés à la même forme quadratique q_n, mais pour des produits scalaires différents, qui sont respectivement

$$\begin{aligned} \big(f|f\big)_{g_0} &:= \frac{r\sin\theta}{n^2} \sum_{v\in S_n} f^2(v), \\ \big(f|f\big)_{g} &:= \frac{r\sin\theta}{n^2} \sum_{v\in S_n} e^{2\varphi(v)} f^2(v). \end{aligned}$$

Soit

- $A := \big[a_{vw}\big]_{1\le v,w\le n^2}$ la matrice de Δ_{n,g_0} dans la base canonique,
- $\mathcal{B}$ la base $\big(e^{-\varphi(v)}\delta_v\big)_{v\in V_n}$ de $\mathbb{R}^{S_n}$,
- $D := \mathrm{Diag}\big(e^{-\varphi(1)}, \dots, e^{-\varphi(n^2)}\big)$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

La matrice B de l'opérateur $\Delta_{n,g} = e^{-2\varphi}.\Delta_{n,g_0}$ dans la base $\mathcal{B}$ est alors égale à

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{Mat}_{\mathrm{B}}\big(e^{-2\varphi}\Delta_{n,g_0}\big) = D^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}\big(e^{-2\varphi}\Delta_{n,g_0}\big)D \\ &= D\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}\big(\Delta_{n,g_0}\big)D \\ &= \left[e^{-\big(\varphi(v)+\varphi(w)\big)} a_{vw}\right]_{1\le v,w\le n^2}. \end{aligned}$$

Appliquons alors le lemme A.0.2 en posant $b_v := e^{-\varphi(v)}$:

$$\frac{\det{}'\Delta_{n,g}}{\det{}'\Delta_{n,g_0}} = \frac{1}{n^2}\exp\left\{-2\sum_{v\in S_n}\varphi(v)\right\}\left(\sum_{v\in S_n} e^{2\varphi(v)}\right). \tag{A.6}$$

Cette formule nous pousse à croire que le lemme A.0.2 pouurait être une formule de Polyakov discrète. Nous avons en effet très fortement utilisé que ces laplaciens provenaient de triangulations d'une surface munie respectivement de deux métriques conformes, puisque l'argument principal dans le calcul de ce lemme est que ces deux laplaciens sont obtenus à partir de la même énergie de Dirichlet. Or, l'invariance conforme de l'énergie de Dirichlet est une caractéristique de la dimension 2.

Malheureusement, à la limite, cela ne redonne pas la formule de Polyakov, et ne converge donc pas vers le rapport des déterminants $\zeta-$régularisés. Rappelons en effet que, pour un tore plat (T^2, g_0), la formule de Polyakov s'écrit :

$$\ln\frac{\det_\zeta{}'\Delta_{e^{-2\varphi}g_0}}{\det_\zeta{}'\Delta_{g_0}} = -\frac{1}{12\pi}\int_{\mathrm{M}}\|\nabla\varphi\|^2 dv_{g_0} + \ln\frac{\mathrm{Vol}_g(T^2)}{\mathrm{Vol}_{g_0}(T^2)}.$$

Proposition A.0.3 *Lorsque n tend vers $+\infty$,*

$$\ln\frac{\det'\Delta_{n,g}}{\det'\Delta_{n,g_0}} = -2n^2\int_{T^2}\varphi\frac{dv_{g_0}}{Vol_{g_0}} + \ln\frac{Vol_g(T^2)}{Vol_{g_0}(T^2)} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right),$$

pour tout n supérieur à 1. De plus, il existe une constante C_r ne dépendant que d'un majorant de $\|\varphi\|_{2r+5,\infty}$ telle que

$$O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right) \le \frac{C_r}{n^{2r}}.$$

Démonstration : Cette proposition est une conséquence de (A.6) et du lemme suivant :

Lemme A.0.4 *Pour tout entier r, il existe une constante $C_r > 0$ telle que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2/\Lambda \to \mathbb{C}$ de classe C^{2r+2},*

$$\left|\frac{1}{n^2}\sum_{v\in S_n} f(v) - \int_{T^2} f(x)\frac{dv_{g_0}(x)}{Vol_{g_0}(T^2)}\right| \le \frac{C_r}{n^{2r-1}}\|f\|_{2r+2,\infty}.$$

Démonstration du lemme A.0.4 : La formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin affirme que si $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est de classe C^{2r+1},

$$\sum_{p=0}^{n-1} g\left(\frac{p}{n}\right) = n\int_0^1 g(x)dx - \frac{1}{2r!n^{2r}}\int_0^1 g^{(2r)}(x)B^*_{2r}(nx)dx,$$

où $B_{2r}^*(x) := B_{2r}(x - \lfloor x \rfloor)$ est le $2r^{\text{ième}}$ polynôme de Bernouilli évalué en la partie fractionnaire de x (voir [Go]). C'est une fonction $1-$périodique polynomiale sur $[0,1[$, donc bornée sur $\mathbb{R}$ par une constante K_r. D'où si $g : S^1 \times S^1 \to \mathbb{C}$ est C^{2r+1}, en appliquant la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin à $x \mapsto g\left(x, \frac{l}{n}\right)$ pour tout $l \in [0, n-1]$, et en sommant ces n égalités :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} g\left(\frac{p}{n}, \frac{l}{n}\right) &= n\int_0^1 \sum_{l=0}^{n-1} g\left(x, \frac{l}{n}\right) dx \\ &- \frac{1}{2r!n^{2r}}\int_0^1 \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} g\left(x, \frac{l}{n}\right) B_{2r}^*(nx)dx.\end{aligned}$$

Or, pour tout x dans $[0,1]$,

$$\sum_{l=0}^{n-1} g\left(x, \frac{l}{n}\right) = n\int_0^1 g(x,y)\, dy - \frac{1}{2r!n^{2r}}\int_0^1 \frac{\partial^{2r}}{\partial y^{2r}} g(x,y)\, B_{2r}^*(ny)dy.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} g\left(\frac{p}{n}, \frac{l}{n}\right) &= n^2\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\, dxdy - \frac{1}{2r!n^{2r-1}}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{2r}}{\partial y^{2r}} g(x,y)\, B_{2r}^*(ny)dydx \\ &- \frac{1}{2r!n^{2r}}\int_0^1 \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} g\left(x, \frac{l}{n}\right) B_{2r}^*(nx)dx.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} g\left(x, \frac{l}{n}\right)\right| &= \left|n\int_0^1 \frac{\partial^{2r}}{\partial x^{2r}} g(x,y)\, dy - \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \frac{\partial^{2r+2}}{\partial x^{2r}\partial y^2} g(x,y)\, B_2^*(ny)dy\right| \\ &\leq n\|g\|_{2r,\infty} + \frac{1}{2n^2}\|g\|_{2r+2,\infty}\|B_2^*\|_\infty.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{0\leq p,l\leq n-1} g\left(\frac{p}{n}, \frac{l}{n}\right) &- n^2\int_0^1\int_0^1 g(x,y)dxdy\Big| \\ &\leq \frac{1}{2r!n^{2r}}\Big(n\|g\|_{2r,\infty}\big(\|B_{2r}^*\|_\infty + 1\big) + \frac{1}{2n^2}\|g\|_{2r+2,\infty}\|B_2^*\|_\infty\Big) \\ &\leq \frac{\|g\|_{2r+2,\infty}}{2r!n^{2r-1}}\left(1 + K_r + \frac{K_1}{2n^3}\right). \qquad \text{(A.7)}\end{aligned}$$

Enfin, en posant $g(x,y) := f(x + yr\cos\theta, yr\sin\theta)$, où $f : \mathbb{R}^2/\Lambda \to \mathbb{C}$ est C^{2r+2}, le lemme A.0.4 est une conséquence de (A.7) et de

$$\int_0^1\int_0^1 g(x,y)dxdy = \iint_{T^2} f(u)\frac{dv_{g_0}(u)}{\mathrm{Vol}_{g_0}(T^2)}.$$

Bibliographie

[AL] **O. Alvarez** *Theory of strings with boundary*, Nucl. Phys. B, **216**, 125-184 (1983)

[BFK1] **D. Burgheela, L. Friedlander, T. Kappeler** *On the determinant of elliptic differential and finite difference operators in vector bundles over S^1*, Communications in Mathematical Physics, **138**, 1-18 (1991)

[BFK2] **D. Burgheela, L. Friedlander, T. Kappeler** *On the determinant of elliptic boundary value problems on a line segment*, Proc. AMS, **123**, 3027-3038 (1995)

[Carr] **G. Carron** *Determinant relatif et la fonction ξ*, Am. J. Math. **124**, No 2, 307-352 (2002)

[Carl] **T. Carleman** *Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes*, Skand. Matem. Kongress (1934)

[Ci] **P. Ciarlet** *Finite elements method*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002

[C-Cdv] **B. Colbois, Y. Colin De Verdière** *Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante*, Comment. Math. Helv. **63**, No 2, 194-208 (1988)

[Cdv1] **Y. Colin De Verdière** *Déterminants et intégrales de Fresnel*, Annales de l'Institut Fourier, **49**, 861-881 (1999)

[Cdv2] **Y. Colin de Verdière** *Spectres de Graphes*, Société Mathématique de France, 1998

[Cdv-Ma] **Y. Colin De Verdière, A. Marin** *Triangulations presque équilatérales des surfaces*, J. Differential Geometry **32**, 199-207 (1990)

[Ch] **F. Chung** *Spectral graph theory*, American Mathematical Society, 1997

[COM] **C. Coulson, B. O'Leary, R. Mallon** *Huckel theory for organic Chemists*, Academic Press, 1978

[Dod] **J. Dodziuk** *Finite-difference approach to the Hodge theory of harmonic forms*, American Journal of Mathematics **98**, No 1, 79-104 (1976)

[DP] **V.K.Dodziuk et J.Patodi** *Riemannian structures and triangulations of manifolds* Journal of the Indian Mathematical Society 40 (1976)

[Dr-Dy] **T. Dreyfuss, H. Dym** *Product formulas for the eigenvalues of a class of boundary value problems*, Duke Math. J., **45**, 15-37 (1978)

[Du-Da] **B. Duplantier, F. David** *Exact partition functions and correlation functions of multiple Hamiltonian walks on the Manhattan lattice*, J. Statist. Phys., **51**, 327-434 (1988)

[Fo1] **R. Forman** *Functional determinants and geometry*, Inventiones Mathematicae, **88**, 447-493 (1987)

[Fo2] **R. Forman** *Determinants, Finite-difference operators and Boundary Value Problems*, Communications in Mathematical Physics, **147**, 485-526 (1992)

[Fo3] **R. Forman** *Determinants of laplacians on graphs*, Topology, **Vol 32 No 1**, 35-46 (1993)

[FY] **O. Francois, B. Ycart** *Introduction au problème de l'estimation de la vitesse de convergence pour les processus de Markov*, Polycopié LMC-IMAG, 1-19, 1994

[G-H-L] **S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine** *Riemannian Geometry* Springer, Universitext, 1990

[Go] **R. Godement** *Analyse Mathématique II*, Springer Verlag, 1998.

[Gil] **P. B. Gilkey** *Invariance theory, the Heat equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Studies in Advanced Mathematics, Second edition (1994)

[Ka] **T. Kato** *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag

[Ke] **R. Kenyon** *The asymptotic determinant of the discrete laplacian*, Acta Math., **185**, 239-286 (2000)

[L-S] **S. Levit, U. Smilansky** *A theorem on infinite products of eigenvalues of Sturm-Liouville type operators* Proc. Am. Math. Soc. **65** 299-302 (1977)

[McK-S] **H. P. McKean, I.M. Singer** *Curvature and the eigenvalues of the laplacian*, J. Differential Geometry, **1**, 43-69 (1967)

[MP] **S. Minakshisundaram, A. Pleijel** *Some properties of the eigenfunctions of the laplace operator on Riemannian manifolds*, Can. J. Math. **1**, 242-256 (1949)

[O] **K. Okikiolu** *Critical metrics for the determinant of the Laplacian in odd dimensions*, Annals of Mathematics, **153**, 471-531 (2001)

[OPS1] **B.Osgood, R.Phillips, P.Sarnak** *Extremals of Determinants of Laplacians*, Journal of Functional Analysis, **80**, 148-211 (1988)

[OPS2] **B.Osgood, R.Phillips, P.Sarnak** *Compact isospectral sets of surfaces*, Journal of Functional Analysis, **80**, 212-234 (1988)

[P-DR] **M. Pollicott, A.C. Rocha** *A remarkable formula for the determinant of the Laplacian*, Inventiones Mathematicae, **130**, 399-414 (1997)

[Po] **A. Polyakov** *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lettre B, **103**, 207-210 (1981)

[1] [R-S] **D.B. Ray, I.M. Singer** *R-Torsion and the laplacian on Riemannian Manifolds*, Advances Math., **7**, 145-210 (1971)

[Ro] **S. Rosenberg** *The laplacian on a riemannian manifold*, London Mathematical Society, Student Texts **31**

[Si] **B. Simon** *Trace ideals and their applications*, London Mathematical Society, Lecture Note Series 35, Cambridge University Press, 1979.

[Se] **R.T. Seeley** *Complex powers of an elliptic operator*, Proc. Symp. in Math., **10**, 288-307 (1967)

[Sh] **M.A. Shubin** *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer Verlag (1980)

[Te] **H. Temperley** *Enumeration of graphs on a large periodic lattice*, Combinatorics 202-204. London